1. Баъзе ҳодисаҳои физикии ба муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ оваранда

1.1. **Ҳодисаҳои лаппиш.** Бисёре аз ҳодисаҳои лаппиш ба муодилаи намуди зерин меоваранд:

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_1}(p\frac{\partial u}{\partial x_1}) + ... + \frac{\partial}{\partial x_n}(p\frac{\partial u}{\partial x_n}) - qu + F, \tag{1.1}$$

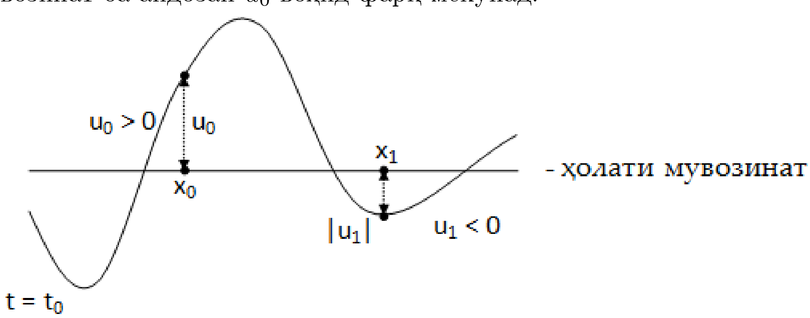
ки дар ин ҷо $u(t, x_1, ..., x_n)$ функсияи номаълум мебошад. Тағйирёбандаи новобастаи t вақтро ифода менамояд ва $t > 0$ аст. Тағйирёбандаҳои новобастаи $x_1, ..., x_n$ аз ягон маҷмӯъ қимат қабул намуда, андозаҳои фазои ҷисм ё муҳити лаппандаро ифода мекунанд.

Муодилаи (1.1)-ро *муодилаи лаппиш* низ меноманд. Дар он коэффитсиентҳои ρ, p, q шояд аз тағйирёбандаҳои $t, x_1, ..., x_n$ вобаста буда, тавсифдиҳандаҳои муҳите мебошанд, ки дар он лаппиш рӯй медиҳад. Функсияи $F(t, x_1, ..., x_n)$ таъсири қувваҳои беруниро ифода менамояд.

Агар дар муодилаи лаппиш $n = 1$ бошад, он гоҳ муодилаи

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}(p\frac{\partial u}{\partial x}) - qu + F(t, x) \tag{1.2}$$

ҳосил мешавад. Ин муодила ҳодисаи лаппиши тор (ресмон)-ро ифода мекунад. Тағйирёбандаи x нуқтаҳои тори лаппандаро ифода менамояд. Агар барои ягон қиматҳои $t = t_0, x = x_0$ функсияи u қимати u_0-ро қабул кунад, пас ин чунин маъно дорад, ки дар нуқтаи x_0-и тор дар лаҳзаи вақти t_0 тор аз ҳолати мувозинат ба андозаи u_0 воҳид фарқ мекунад.



Функсияи $u(t, x)$-ро донем, пас мо гуфта метавонем, ки дар дилхоҳ лаҳзаи вақти t дар дилхоҳ нуқтаи x-и тор ҳолати торро медонем. Дар амалия ин бузургиро бевосита муайян кардан ғайриимкон аст. Лекин муодилаи дифференсиалии бузургии u қонеъ мекунондагиро тартиб додан мумкин аст. Ин муодила намуди (1.2)-ро дорад.

Агар дар муодилаи (1.2) тағйирёбандаи x дар фосилаи $(-\infty, +\infty)$ тағйир ёбад, он гоҳ мегӯянд, ки муодилаи (1.2) ҳодисаи лаппиши тори номаҳдудро ифода мекунад. Агар x дар фосилаи $(0, +\infty)$ тағйир ёбад, муодилаи (1.2)-ро муодилаи лаппиши тори ниммаҳдуд меноманд. Агар x дар фосилаи $(0, l)$ тағйир ёбад, муодилаи (1.2)-ро муодилаи лаппиши тори дарозиаш l меноманд. Дар амалия тори номаҳдуд ё ниммаҳдуд нест. Агар тор бениҳоят дароз буда, канорҳояш ба лаппиши тор кам таъсир дошта бошанд, он гоҳ канорҳоро беохир дур ҳисобидан мумкин аст.

Дар ҳолати $F(t, x) \equiv 0$ будан, муодилаи (1.2)-ро *муодилаи лаппиши озоди тор* меноманд.

Агар дар (1.1) $n = 2$ бошад, он гоҳ муодилаи

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_1}(p\frac{\partial u}{\partial x_1}) + \frac{\partial}{\partial x_2}(p\frac{\partial u}{\partial x_2}) - qu + F(t, x_1, x_2) \qquad (1.3)$$

ҳосил мешавад, ки ҳодисаи лаппиши пластина ё мембранаро ифода менамояд. Қиматҳое, ки тағйирёбандаҳои x_1, x_2 қабул мекунанд, дар маҷмӯъ андозаи мембранаи лаппандаро тавсиф медиҳанд.

Агар $n = 3$ бошад, муодилаи (1.1) ҳодисаҳои лаппиши ҷисмҳои сеченака ва паҳншавии мавҷҳоро дар фазо ифода мекунад.

Шакли маъмули муодилаи (1.1), ки минбаъд бештар мавриди омӯзиш қарор мегирад, чунин мебошад:

$$\Box_a u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = f(t, x_1, ..., x_n), \qquad (1.4)$$

ки дар ин ҷо

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2},$$

буда, *оператори Лаплас* номида мешавад. Ифодаи $\Box_a u$-ро *оператори мавҷӣ* ё *оператори Д'Аламбер* меноманд.

Аз нуқтаи назари физика тадқиқи пурраи ҳодисаҳои зикршуда тавассути муодилаи (1.1) бидуни маълумоти иловагӣ оид ба ҳолатҳои ҳодисаҳо дар лаҳзаи аввали вақт ва қонунияти тағйирёбии канорҳои ҷисмҳои лаппанда аз имкон берун аст. Бинобарон муодилаи (1.1)-ро одатан бо шатрҳои иловагӣ меомӯзанд. Шартҳои иловагӣ ба ду гурӯҳ ҷудо мешаванд: *шартҳои аввала* ва *шартҳои канорӣ*. *Шартҳои аввала* ҳолати аввалаи ҳодисаи тадқиқшавандаро ифода менамоянд. Барои муодилаи (1.1) шартҳои аввала чунин намуд доранд:

$$u(t, x_1, ..., x_n)\big|_{t=0} = \varphi(x_1, ..., x_n),$$

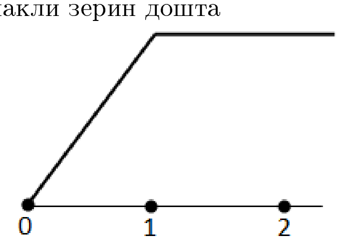
$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x_1, ..., x_n)\big|_{t=0} = \psi(x_1, ..., x_n),$$

ки дар ин ҷо φ, ψ функсияҳои маълум мебошанд. Функсияи φ ҳолати аввала ва функсияи ψ суръати аввалаи ҷисми лаппандаро ифода мекунанд. Масалан, агар барои муодилаи лаппиши тор (1.2) чунин шартҳои аввала гузошта шуда бошанд:

$$u(0, x) = \begin{cases} 2x, & 0 \le x \le 1 \\ 2, & 1 < x \le 2, \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ 1, & 1 < x \le 2, \end{cases}$$

пас ин чунин маъно дорад, ки дар лаҳзаи вақти $t = 0$ тори дарозиаш $l = 2$ шакли зерин дошта



суръати аввалаи ҳар як нуқтаи x-и тор вобаста дар кадоме аз фосилаҳои $[0;1], (1;2]$ хобиданаш ба x ё 1 баробар аст. Яъне ин шартҳо ҳолати торро дар лаҳзаи аввали вақт тавсиф медиҳанд.

Шартҳои канорӣ қонунияти тағйирёбии канорҳои ҷисми лаппандаро ҳангоми лаппиш ифода мекунанд. Масалан, агар $x = 0$ яке аз канорҳои тори лаппанда буда, дар ҳар як лаҳзаи вақти t аз ҳолати мувозинаташ ба андозаи $\mu(t)$ воҳид фарқ кунад, чунин шарти канорӣ мегузоранд:

$$u(t,0) = \mu(t), \quad t \geq 0. \tag{1.5}$$

Агар ба канори чапи тор ягон қуввае таъсир намояд, он гоҳ шарти канории зеринро мегузоранд:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\big|_{x=0} = \nu(t), \quad t \geq 0. \tag{1.6}$$

Ин ҷо функсияи $\nu(t)$ маълум буда, аз рӯи қувваи ба канори чап таъсиркунанда муайян карда мешавад. Шарти канорӣ дар шакли зайл низ дода шуданаш мумкин аст:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \sigma u\right)\bigg|_{x=0} = \nu(t), \quad t \geq 0. \tag{1.7}$$

Айнан ҳамин гуна шартҳоро дар канори рости тор гузоштан мумкин аст.

1.2. **Протсесси гармипаҳншавӣ.** Протсесси гармипаҳншавӣ дар ҷисмҳо ё муҳит ба муодилаи дифференсиалии зерин меоварад:

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_1}(p\frac{\partial u}{\partial x_1}) + ... + \frac{\partial}{\partial x_n}(p\frac{\partial u}{\partial x_n}) - qu + F(t, x_1, ...x_n). \tag{1.8}$$

Функсияи $u(t, x_1, ..., x_n)$ ҳарорати ҷисмро дар нуқтаи $(x_1, ..., x_n)$ дар лаҳзаи вақти t ифода мекунад. Коэффитсиентҳои ρ, p, q тавсифдиҳандаҳои ҷисм ё муҳит буда, функсияи F таъсири манбаъҳои берунии гармию хунукиро ифода менамояд.

Агар $n = 1$ бошад, он гоҳ муодилаи (1.8) чунин намуд мегирад:

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(p\frac{\partial u}{\partial x}) - qu + F(t, x). \tag{1.9}$$

Муодилаи мазкур протсесси гармипаҳншавиро дар меҳвар (стержень) ифода мекунад. Ҳангоми $n = 3$ будан, муодилаи (1.8) протсесси гармипаҳншавӣ дар ҷисмҳои сеченака ва ҳодисаи диффузияро тавсиф медиҳад.

Муодилаи (1.8) *муодилаи гармипаҳншавӣ* номида шуда, монанди муодилаи лаппиш, бо шартҳои аввалаю канорӣ омӯхта мешавад. Шарти аввала намуди зеринро дошта

$$u(0, x_1, ..., x_n) = \varphi(x_1, ..., x_n),$$

ҳарорати ибтидоиро нишон медиҳад. Шартҳои канорӣ яке аз намудҳои (1.5) - (1.7)-ро дошта, режими ҳароратро дар канорҳо ифода мекунанд.

1.3. **Протсессҳои статсионарӣ.** Ҳодисае, ки бо мурури гузаштани вақт тағйир намеёбад, *протсесси статсионарӣ* меноманд. Масалан, дар ҳодисаҳои гармипаҳншавӣ, диффузия бо мурури гузаштани вақти зиёд тағйирёбии бузургии u нисбат ба вақт ноаён гашта, ҳодиса характери статсионарӣ мегирад.

Ҳодисаҳои статсионарӣ тавассути муодилаи намуди

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(p\frac{\partial u}{\partial x_1}) + ... + \frac{\partial}{\partial x_n}(p\frac{\partial u}{\partial x_n}) - qu + F(x_1, ...x_n) = 0 \tag{1.10}$$

тавсиф меёбанд. Функсияи $u(x_1, ..., x_n)$ қимати бузургии матлубро дар нуқтаи $(x_1, ..., x_n)$ ифода менамояд.

Ҳодисаи дифраксияи мавҷҳо дар фазо тавассути муодилаи ба (1.10) монанди

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2 u = -f(x, y, z)$$

ифода меёбад. Ин муодиларо *муодилаи Гелмголтс* меноманд.

Азбаски муодилаи (1.10) протсессҳои статсионариро ифода мекунад, бинобарон ин муодиларо танҳо бо шартҳои канорӣ меомӯзанд.

Ҳамин тариқ, бо се гурӯҳи ҳодисаҳо шинос шудем, ки ба се намуд муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ меоваранд. Минбаъд ҳар яке аз ин муодилаҳо мавриди омӯзиш қарор мегиранд. Мо ин ҷо дар бораи тарзҳои ҳосил шудани муодилаҳо истода нагузаштем. Фақат ҳаминро қайд мекунем, ки ин муодилаҳо дар асоси қонунҳои муайяни физикии хоси ҳодисаҳо буда ҳосил мешаванд. Масалан, барои ҳосил намудани муодилаи лаппиши тор аз қонунҳои Гук ва Нютон истифода бурдан лозим аст.

2. Масъалаи Коши. Теоремаи Ковалевская

Системаи муодилаҳои дифференсиалии намуди зеринро дида мебароем:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} = \sum\limits_{k=1}^{N} \left(a_{11}^{(k)} \frac{\partial u_k}{\partial x_1} + ... + a_{1n}^{(k)} \frac{\partial u_k}{\partial x_n} \right) + b_{11}u_1 + \cdots + b_{1N}u_N + c_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial u_N}{\partial t} = \sum\limits_{k=1}^{N} \left(a_{N1}^{(k)} \frac{\partial u_k}{\partial x_1} + ... + a_{Nn}^{(k)} \frac{\partial u_k}{\partial x_n} \right) + b_{N1}u_1 + \cdots + b_{NN}u_N + c_N, \end{cases} \tag{2.1}$$

ки дар ин ҷо функсияҳои номаълуми $u_1, ...u_N$, коэффитсиентҳои $a_{ij}^{(k)}, b_{ij}$ ва аъзоҳои озоди c_i аз тағйирёбандаҳои $t, x_1, ..., x_n$ вобаста мебошанд. Хусусияти муҳимми системаи (2.1) дар он мебошад, ки нисбат ба ҳосилаҳои $\frac{\partial u_1}{\partial t}, ..., \frac{\partial u_N}{\partial t}$ ҳалшуда мебошад. Ингуна системаи муодилаҳои дифференсиалиро *ба маънои Ковалевская нормалӣ* меноманд. Коэффитсиентҳои муодила ва аъзоҳои озод дар ягон соҳаи $Q = (0; T) \times \Omega, \Omega \subset \mathbb{R}^n$ муайян мебошад.

Барои системаи (2.1) *масъалаи Коши* аз ёфтани функсияҳои $u_1(t, x_1, ..., x_n), ..., u_N(t, x_1, ..., x_n)$ иборат мебошад, ки дар соҳаи Q ҳалли системаи (2.1) буда, барои ягон $t_0 \in (0, T)$ шартҳои аввалаи

$$u_k(t_0, x_1, ..., x_n) = \varphi_k(x_1, ..., x_n), \quad k = \overline{1, N} \tag{2.2}$$

-ро қонеъ кунонанд. Дар ин ҷо функсияҳои $\varphi_k, k = \overline{1, N}$ маълум мебошанд.

Мо гузориши масъалаи Коширо барои системаи муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусии тартиби якӯм овардем. Ба ҳамин монанд гузориши масъалаи Коширо барои системаи муодилаҳои дифференсиалии тартибашон олии шакли нормалӣ дошта овардан мумкин аст. Барои бо баёни ҳарчи мухтасар ба мақсад расидан, системаи муодилаҳои дифференсиалии тартиби якумро интихоб намудем. Ҳаргуна системаи муодилаҳои дифференсиалии тартиби олиро тавассути ҷорӣ намудани функсияҳои номаълуми нав ба системаи муодилаҳои дифференсиалии тартиби якӯм овардан мумкин аст.

Доири мавҷудият ва ягонагии ҳалли масъалаи Коши (2.1) – (2.2) теоремаи зерин ҷой дорад.

Теоремаи Ковалевская. *Бигзор ҳамаи функсияҳои* $a_{ij}^{(k)}, b_{ij}, c_i$ *дар атрофи нуқтаи* $(t_0, x_1^0, ...x_n^0) \in Q$ *ва функсияҳои* φ_k *дар атрофи нуқтаи* $(x_1^0, ...x_n^0) \in \Omega$ *аналитикӣ бошанд. Он гоҳ ягона маҷмӯи функсияҳои дар атрофи нуқтаи* $(t_0, x_1^0, ...x_n^0)$ *аналитикии* $u_1, ..., u_N$ *мавҷуд мебошад, ки ҳалли масъалаи* (2.1)*–*(2.2) *мешавад.*

Функсияи $F(y_1, ..., y_n)$ дар атрофи нуқтаи $(y_1^0, ..., y_n^0)$ *аналитикӣ* номида мешавад, агар дар ягон атрофи ин нуқта функсияро дар намуди суммаи қатори дараҷагии наздикшаванда тасвир кардан мумкин бошад:

$$F(y_1, ..., y_n) = \sum_{(k_1,...,k_n)} A_{k_1,...,k_n} \cdot (y_1 - y_1^0)^{k_1} \cdot ... \cdot (y_n - y_n^0)^{k_n}. \tag{2.3}$$

Дар ин ҳолат функсияи F дар нуқтаи $(y_1^0, ..., y_n^0)$ дорои ҳосилаҳои тартиби ихтиёрӣ буда,

$$A_{k_1...k_n} = \frac{1}{k_1!...k_n!} \left(\frac{\partial^{k_1+...+k_n} F}{\partial y_1^{k_1} ... \partial y_n^{k_n}} \right)_{y_i = y_i^0}, \quad i = \overline{1,n} \tag{2.4}$$

аст. Байни функсияи F ва маҷмӯи коэффитсиентҳои қатори (2.3) муносибати байни ҳам яккимата ҷой дорад. Яъне аз рӯи коэффитсиентҳои қатор дар атрофи нуқтаи $(y_1^0, ..., y_n^0)$ худи функсияи F-ро барқарор кардан мумкин аст.

Акнун ба исботи теорема шурӯъ мекунем. Минбаъд барои осонии кор $t_0 = x_1^0 = ... = x_n^0, \varphi_k(x_1, ..., x_n) \equiv 0, k = \overline{1,N}$ ҳисобидан мумкин аст. Ин эътимоди исботи теоремаро камтар накарда, балки баҳри ҳарчи зудтар ба маънии исбот сарфаҳм рафтан кӯмак мекунад.

Исботи ягонагии ҳал. Бигзор маҷмӯи функсияҳои дар атрофи нуқтаи $(0, 0, ..., 0)$ аналитикии $u_1, ..., u_N$ ҳалли системаи (2.1) буда, шартҳои аввалаи

$$u_m(0, x_1, ..., x_n) \equiv 0, \quad m = \overline{1,N} \tag{2.5}$$

-ро қаноат кунонанд. Он гоҳ дар атрофи нуқтаи $(0, 0, ..., 0)$ функсияҳои $u_1, ..., u_N$-ро дар намуди қаторҳои наздикшавандаи

$$u_m(t, x_1, ..., x_n) = \sum_{(k_0,...,k_n)} A^m_{k_0 k_1 ... k_n} \cdot t^{k_0} x_1^{k_1} ... x_n^{k_n}, \quad m = \overline{1,N}. \tag{2.6}$$

тасвир кардан мумкин аст. Мувофиқи формулаи (2.4)

$$A^{(m)}_{k_0 k_1 ... k_n} = \frac{1}{k_0! k_1! ... k_n!} \left(\frac{\partial^{k_0 + k_1 + ... + k_n} u_m}{\partial t^{k_0} \partial x_1^{k_1} ... \partial x_n^{k_n}} \right)_{t=0}, x_i = 0, \quad i = \overline{1,n}$$

аст. Аз шартҳои аввалаи (2.5) бармеояд, ки ададҳои $A_{0k_1...k_n}$ ба нул баробар мебошанд. Аз ҳар ду тарафи муодилаҳои системаи (2.1) ҳосилаҳои

$$\frac{\partial^{k_1+...+k_n}}{\partial x_1^{k_1} ... \partial x_n^{k_n}}$$

гирифта, $t = 0, x_1 = 0, ..., x_n = 0$ мегузорем. Он гоҳ дар тарафҳои чапи баробариҳо ададҳои $A^{(m)}_{1k_1...k_n}$ ҳосил шуда, дар тарафҳои рост ифодаҳои аз қиматҳои коэффитсиентҳою аъзоҳои озод ва ҳосилаҳои онҳо дар нуқтаи $(0, 0, ..., 0)$ иборат буда, ҳосил мешаванд. Пас, ададҳои $A^{(m)}_{1k_1...k_n}$ аз рӯи коэффитсиентҳо ва аъзоҳои озоди система яққимата муайян карда мешаванд. Акнун аз ҳар ду тарафи муодилаҳои системаи (2.1) ҳосилаҳои

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^{k_1+...+k_n}}{\partial x_1^{k_1}...\partial x_n^{k_n}}\right)$$

гирифта, $t = 0, x_1 = 0, ..., x_n = 0$ мегузорем. Он гоҳ дар тарафҳои чап ададҳои $A^{(m)}_{2k_1...k_n}$ ҳосил мешаванд. Дар тарафҳои рост ифодаҳое ҳосил мешаванд, ки аз ададҳои $A^{(m)}_{1k_1...k_n}$, қиматҳои коэффитсиентҳою аъзоҳои озод ва ҳосилаҳояшон дар нуқтаи $(0, 0, ..., 0)$ иборат мебошанд. Пас, ададҳои $A^{(m)}_{2k_1...k_n}$ низ аз рӯи коэффитсиентҳо ва аъзоҳои озоди система яққимата муайян карда мешаванд. Ин мулоҳизарониҳоро қадам ба қадам давом диҳем, аён мегардад, ки ҳамаи коэффитсиентҳои $A^{(m)}_{k_0k_1...k_n}$-и қатори (2.6) тавассути функсияҳои $a^{(m)}_{ij}, b_{ij}, c_i$ яққимата муайян карда мешаванд. Пас, функсияҳои $u_1, ..., u_N$ дар ягон атрофи нуқтаи $(0, 0, ..., 0)$ тавассути функсияҳои $a^{(m)}_{ij}, b_{ij}, c_i$ яққимата муайян карда мешаванд. Ин нишон медиҳад, ки ҳалли аналитикии масъалаи Коши ягона аст.

Исботи мавҷудияти ҳал. Аз рӯи функсияҳои $a^{(m)}_{ij}, b_{ij}, c_i$ тавассути қоидаҳои дар боло зикршуда ададҳои $A^{(m)}_{k_0k_1...k_n}$-ро меёбем ва қаторҳои дараҷагии (2.6)-ро тартиб медиҳем. Аз тарзи ёфтани ададҳои $A^{(m)}_{1k_1...k_n}$ аён мегардад, ки дар ҳолати дар ягон атрофи нуқтаи $(0, 0, ..., 0)$ мунтазам наздикшаванда будани қаторҳои тартиб додашуда, суммаҳои онҳо дар маҷмӯъ ҳалли дар атрофи нуқтаи $(0, 0, ..., 0)$ аналитикии масъалаи Коши мешаванд.

Наздикшавандагии қаторҳоро бо методе нишон медиҳем, ки бо номи *методи мажорантаҳо* маъмул аст.

Мажорантаи функсияи дар атрофи $(t_0, x^0_1, ..., x^0_n)$ аналитикии φ гуфта функсияи дар атрофи ин нуқта аналитикии ψ-ро меноманд, ки коэффитсиентҳои қатораш аз қиматҳои мутлақи коэффитсиентҳои мувофиқи қатори φ хурд намебошанд.

Исботи наздикшавандагии қаторҳои (2.6)-ро ба тариқи зайл анҷом медиҳем:

1) барои функсияҳои $a^{(m)}_{ij}, b_{ij}, c_i$ мажорантаи умумиро интихоб мекунем;

2) дар системаи (2.1) ба ҷои функсияҳои $a^{(m)}_{ij}, b_{ij}, c_i$ мажорантаи умумиро гузошта системаи дуюмро тартиб медиҳем;

3) нишон медиҳем, ки системаи дуюм ҳалли дар атрофи нуқтаи $(0, 0, ..., 0)$ аналитикӣ дорад, ки коэффитсиентҳои қатораш аз қимати мутлақи коэффитсиентҳои мувофиқи қаторҳои (2.6) хурд нестанд (яъне ҳалли системаи дуюм мажорантаи ҳалли системаи (2.6) мешавад).

Бигзор функсияҳои $a^{(m)}_{ij}, b_{ij}, c_i$-ро дар атрофи

$$S_a = \{(t, x_1, ..., x_n) : |t| < a, |x_1| < a, ...|x_n| < a\}$$

-и нуқтаи $(0, 0, ..., 0)$ ба қаторҳои мунтазам наздикшаванда паҳн кардан мумкин бошад. Адади мусбати M-ро чунон интихоб мекунем, ки коэффитсиентҳои $A_{k_0k_1...k_n}$-и қаторҳои функсияҳои $a^{(m)}_{ij}, b_{ij}, c_i$ бо қиматҳои мутлақашон аз адади $M/a^{k_0+...+k_n}$ зиёд нашаванд. Он гоҳ функсияи

$$\psi^0(t, x_1, ..., x_n) = M/\left(1 - \frac{\frac{t}{\alpha} + x_1 + ... + x_n}{a}\right), \quad (0 < \alpha < 1)$$

ҳангоми $|\frac{t}{\alpha}| + |x_1| + ... + |x_n| < a$ будан ба қатори мунтазам наздикшавандаи

$$M\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\frac{t}{\alpha} + x_1 + ... + x_n}{a}\right)^k = M\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{a^k}\times$$
$$\times \sum_{k_0+k_1+...+k_n=k}\frac{k!}{k_0!k_1!...k_n!}\left(\frac{t}{\alpha}\right)_0^k \cdot x_1^{k_1}\cdot ... \cdot x_n^{k_n}$$

паҳн шуда, мажорантаи умумии функсияҳои $a_{ij}^{(m)}, b_{ij}, c_i$ мешавад. Зеро ки мувофиқи интихоби адади M барои коэффитсиентҳои $A_{k_0k_1...k_n}$-и қаторҳои ин функсияҳо нобаробариҳои зерин дурустанд:

$$\left|A_{k_0k_1...k_n}\right| \le \frac{M}{a^{k_0+k_1+...+k_n}} = 1\cdot\frac{M}{a^k}\cdot 1 \le$$
$$\le \frac{1}{\alpha^{k_0}}\cdot\frac{M}{a^k}\cdot\frac{(k_0+...+k_n)!}{k_0!\cdot ... \cdot k_n!} = \frac{M\cdot k!}{\alpha^{k_0}a^k k_0!\cdot ... \cdot k_n!}.$$

Дар системаи (2.1) ба ҷои функсияҳои $a_{ij}^{(m)}, b_{ij}, c_i$ мажорантаи умумии ψ-ро гузошта, системаи дуюмро ҳосил мекунем:

$$\frac{\partial\nu_m}{\partial t} = \psi\left(\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\partial\nu_k}{\partial x_1} + ... + \frac{\partial\nu_k}{\partial x_n}\right) + \nu_1 + ... + \nu_N + 1\right), \quad m = \overline{1,N}. \tag{2.7}$$

Ҳалҳои муодилаҳои системаи мазкурро дар намуди зерин ҷустуҷӯ мекунем:

$$\nu_m(t, x_1, ..., x_n) = U(\frac{t}{\alpha} + x_1 + ... + x_n), \quad m = \overline{1,N}.$$

Функсияи номаълуми $U(y)$ ҳалли муодилаи дифференсиалии оддии

$$\frac{1}{\alpha}\frac{dU}{dy} = \frac{M}{1-\frac{y}{a}}\left(Nn\frac{dU}{dy} + nU + 1\right)$$

мебошад. Муодиларо табдил медиҳем:

$$\frac{dU}{NU+1} = \frac{dy}{\frac{1-\frac{y}{a}}{\alpha M} - Nn}.$$

Адади $\alpha \in (0;1)$-ро чунон хурд мегирем, ки дар ягон атрофи нуқтаи $y = 0$

$$A(y) = \frac{1}{\frac{1-\frac{y}{a}}{\alpha M} - Nn} > 0$$

шавад. Он гоҳ функсияи $A(y)$ дар ин атроф аналитикӣ мешавад. Ҳалли зерини муодилаи дифференсиалиро мегирем:

$$U(y) = \left(e^{N\int_0^y A(s)ds} - 1\right)/N.$$

Аналитикӣ будани фнуксияи $U(y)$ дар атрофи интихобшудаи нуқтаи $y = 0$ аён аст.

Акнун нишон медиҳем, ки коэффитсиентҳои қаторҳои функсияҳои дар атрофи нуқтаи $(0, 0, ..., 0)$ аналитикии

$$\nu_m(t, x_1, ..., x_n) = U(\frac{t}{\alpha} + x_1 + ... + x_n), \quad m = \overline{1,N},$$

ки дар маҷмӯъ ҳалли системаи дуюм мебошанд, аз қиматҳои мутлақи коэффитсиентҳои мувофиқи қаторҳои (2.6) хурд нестанд. Ба осонӣ дидан мумкин аст, ки коэффитсиентҳои қатори ба функсияи $A(y)$ мувофиқ мусбат мебошанд. Коэффитсиентҳои қатори ба функсияи

$$B(y) = N\int_0^y A(s)ds$$

мувофиқ мусбат буда, аз баробарии

$$e^{B(y)} - 1 = B(y) + \frac{1}{2!}B^2(y) + ...$$

бармеояд, ки коэффитсиентҳои қатори ба функсияи $U(y)$ мувофиқ низ мусбат мебошанд. Пас, коэффитсиентҳои $C^{(m)}_{k_0k_1...k_n}$-и қаторҳои ба функсияҳои ν_m мувофиқ мусбат мебошанд.

Аз интихоби мажорантаи ψ дурустии нобаробариҳои

$$|A^{(m)}_{0k_1...k_n}| \leq C^{(m)}_{0k_1...k_n}$$

аён аст. Бигзор ҳангоми $k_0 < k$ будан, нобаробариҳои

$$|A^{(m)}_{k_0k_1...k_n}| \leq C^{(m)}_{k_0k_1...k_n}$$

ҷой дошта бошанд. Азбаски ададҳои $A^{(m)}_{kk_1...k_n}, C^{(m)}_{kk_1...k_n}$ мувофиқан аз ададҳои $A^{(m)}_{k_0k_1...k_n}, C^{(m)}_{k_0k_1...k_n}$ ва коэффитсиентҳои қаторҳои аъзоҳои озоду коэффитсиентҳои системаҳои мувофиқ тавассути амалҳои зарбу ҷамъ ҳосил мешаванд, бинобарон нобаробариҳои охирин ҳангоми $k_0 = k$ низ ҷой доранд. Теоремаи Ковалевская исбот шуд.

Робита ба теоремаи Ковалевская теоремаи зерин ҷой дорад.

Теоремаи Ҳолмгрен. *Бигзор функсияҳои $a^{(m)}_{ij}, b_{ij}, c_i$ дар атрофи нуқтаи $(t_0, x^0_1, ..., x^0_n)$ аналитикӣ бошанд. Он гоҳ, агар ҳалли бефосила дифференсиронидашавандаи масъалаи $(2.1) - (2.2)$ мавҷуд бошад, ягона аст.*

Теоремаи мазкур ягонагии ҳалли масъалаи Коширо бидуни аналитикӣ будани ҳал тасдиқ мекунад.

Теоремаҳои Ковалевская ва Ҳолмгрен ба тадқиқу омӯзиши ҳаматарафаи муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ ибтидо гузоштанд. Ғояҳои дар ин теоремаҳо ниҳонбуда минбаъд дар тадқиқотҳои як қатор олимон ба монанди Адамар, Карлеман, Петровский, Мишкис, Плис инкишоф дода шуда, боиси ташаккули зербинои назарияи муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ гардиданд.

3. Мафҳуми характеристика ва масъалаи Коши барои муодилаҳои шаклашон ғайринормалӣ

Дар параграфи гузашта гузориш ва ҳалли масъалаи Коширо барои системаи муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусии шакли нормалӣ дошта дида баромадем. Акнун саволе ба миён мегузорем, ки агар системаи муодилаҳо шакли нормалӣ надошта бошад, гузориш ва ҳалли масъалаи Коши чи гуна мешавад. Ҷавоби ин саволро дар мисоли муодилаи намуди зерин дида мебароем:

$$\sum_{m=1}^{N} \sum_{k_1+...+k_n=m} a^{(m)}_{k_1...k_n}(x_1, ..., x_n)\frac{\partial^{k_1+...+k_n}u}{\partial x_1^{k_1}...\partial x_n^{k_n}} = 0. \tag{3.1}$$

Муодилаи

$$\sum_{k_1+...+k_n=N} a^{(N)}_{k_1...k_n} y_1^{k_1}...y_n^{k_n} = ?. \tag{3.2}$$

муодилаи характеристикии ба муодилаи (3.1) мувофиқ номида мешавад. Сатҳи дар фазои $\mathbb{R}^n$ тавассути муодилаи

$$F(x_1, ..., x_n) = 0$$

дода шуда *сатҳи характеристикӣ ё характеристикаи* муодилаи дифференсиалии (3.1) номида мешавад, агар шартҳои зерин иҷро шаванд:

1) функсияи F бефосила дифференсиронидашаванда аст;

2) дар ҳар як нуқтаи сатҳ вектори $\nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial F}{\partial x_n}\right)$ ғайринулӣ аст;

3) дар ҳар як нуқтаи сатҳ вектори ∇F ҳалли муодилаи характеристикӣ мебошад.

Ба сифати мисол характеристикаҳои баъзе муодилаҳоро меёбем.

Мисоли 1. Барои *муодилаи Лаплас*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0$$

муодилаи характеристикӣ чунин намуд дорад:

$$y_1^2 + ... + y_n^2 = 0.$$

Агар сатҳи $F(x_1, ..., x_n) = 0$ характеристикаи муодилаи Лаплас бошад, бояд дар ҳар як нуқтаи сатҳ шартҳои зерин иҷро шаванд:

$$\nabla F \neq 0, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^2 + ... + \left(\frac{\partial F}{\partial x_n}\right)^2 = 0,$$

ки ин имконнопазир аст. Пас, муодилаи Лаплас сатҳи характеристикӣ надорад.

Мисоли 2. Муодилаи лаппиши озоди тор

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

муодилаи характеристикии

$$y_1^2 - a^2 y_2^2 = 0.$$

-ро дорад. Барои характеристика чунин шартҳоро ҳосил мекунем:

$$F(t, x) = 0, \quad \left|\frac{\partial F}{\partial t}\right| + \left|\frac{\partial F}{\partial x}\right| > 0, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)^2 - a^2 \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 = 0,$$

аз ин ҷо

$$F(t, x) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial t} = \pm a \frac{\partial F}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial t} \neq 0.$$

Агар $F(t, x) = x^2 - a^2 t^2$ гирем, хатҳои рости

$$x = at, \quad x = -at$$

характеристикаи муодила мешаванд.

Мисоли 3. Муодилаи гармипаҳншавиро дида мебароем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}.$$

Барои характеристика чунин шартҳоро ҳосил мекунем:

$$F(t, x_1, ..., x_n) = 0,$$

$$\left|\frac{\partial F}{\partial t}\right| + \left|\frac{\partial F}{\partial x_1}\right| + ... + \left|\frac{\partial F}{\partial x_n}\right| > 0,$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^2 + ... + \left(\frac{\partial F}{\partial x_n}\right)^2 = 0.$$

Пас, $F(t) = 0$ аст. Яъне ҳаргуна маҷмӯи

$$L_c = \{(t, x_1, ..., x_n) : t = c, (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n\},$$

ки гиперҳамвории $t = c$ номида мешавад, характеристикаи муодилаи гармипаҳншавӣ шуда метавонад.

Бигзор S ягон сатҳе дар $\mathbb{R}^n$ бошад. *Масъалаи Коши* барои муодилаи (3.1) аз ёфтани чунин функсияи $u(x_1, ...x_n)$ иборат мебошад, ки дар ягон атрофи сатҳи S ҳалли муодилаи (3.1) буда, дар сатҳи S шартҳои зеринро қаноат кунонад:

$$u\big|_S = \varphi_1, \frac{\partial u}{\partial \rho}\bigg|_S = \varphi_2, ..., \frac{\partial^{N-1} u}{\partial \rho^{N-1}}\bigg|_S = \varphi_N, \tag{3.3}$$

ин ҷо ρ - вектори нормал ба сатҳ, $\varphi_1, ..., \varphi_N$ - функсияҳои дар S додашуда мебошанд. Маълум мешавад, ки агар сатҳи S бо характеристикаҳои муодила бурриш надошта бошад, доир ба ҳалли масъалаи Кошии (3.1), (3.3) тасдиқоти ба теоремаи Ковалевская монанд ҷой дорад. Бигзор функсияҳои

$$\{a^{(m)}_{k_1...k_N}\}, \varphi_1, ..., \varphi_N$$

аналитикӣ буда, сатҳи S шартҳои зеринро қаноат кунонад:

1) ҳар як нуқтаи сатҳ ҳалли муодилаи

$$\Phi(x_1, ..., x_n) = 0$$

мебошад;

2) дар ҳар як нуқтаи сатҳ вектори $\nabla\Phi$ ғайринулӣ аст.

3) функсияи Φ аналитикӣ аст.

Он гоҳ масъалаи (3.1), (3.3) ягона ҳалли дар атрофи сатҳи S аналитикиро дорад.

Агар дар масъалаи (3.1), (3.3) сатҳи S бо ягон характеристикаи муодила нуқтаи умумӣ дошта бошад, он гоҳ барои на ҳаргуна функсияҳои $\varphi_1, ..., \varphi_N$ масъала ҳал дорад. Ҳангоми бо характеристика нуқтаи умумӣ доштани сатҳи S масъалаи (3.1), (3.3) шартҳо ва тадқиқотҳои иловагиро талаб мекунад.

Қайд мекунем, ки дар масъалаи Коши барои системаи шакли нормалӣ дошта ба сифати сатҳи S маҷмӯи дар гиперҳамвории $t = t_0$ мехобидагӣ гирифта шудааст. Аён аст, ки барои системаи нормалӣ характеристикаҳо бо ин гиперҳамворӣ бурриш дошта наметавонанд. Аз ин хотир теоремаи Ковалевская ҷой дорад.

4. Таснифи муодилаҳои дифференсиалии тартиби дуюм

Муодилаи дифференсиалии намуди зеринро дида мебароем:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_1, ..., x_n)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + F(x_1, ..., x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}) = 0, \tag{4.1}$$

ки дар ин ҷо функсияҳои $a_{ij}, i, j = \overline{1, n}$ дар ягон соҳаи Ω, функсияи F дар соҳаи $Q = \Omega \times \mathbb{R}^{1+n}$ муайян мебошанд ва

$$a_{ij}(x_1, ..., x_n) = a_{ji}(x_1, ..., x_n), \quad (x_1, ..., x_n) \in \Omega, \quad i, j = \overline{1, n}$$

аст. Аз рӯи коэффитсиентҳои a_{ij} матритса-функсияи $A(x_1,...,x_n) = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$-ро тартиб медиҳем. Дар ҳар як нуқтаи $(x_1^0,...,x_n^0)$ матритсаи симметрии

$$A^0 = A(x_1^0,...,x_n^0)$$

бо назардошти каратнокиҳояшон расо n-то қиматҳои хоси ҳақиқӣ дорад. Чунин ишораҳоро дохил мекунем:

n_+ - шумораи қиматҳои хоси мусбати матритсаи A^0,

n_- - шумораи қиматҳои хоси манфии матритсаи A^0,

n_0 - шумораи қиматҳои хоси нулии матритсаи A^0.

Ин ҷо шумораи қиматҳои хосро бо назардошти каратнокиҳояшон ба ҳисоб мегирем. Аён аст, ки $n_+ + n_- + n_0 = n$ мебошад.

Агар $n_0 = 0, n_+ = 0$ ё $n_0 = 0, n_- = 0$ бошад, мегӯянд, ки дар нуқтаи $(x_1^0,...,x_n^0)$ муодилаи (4.1) *навъи эллипсӣ* дорад.

Агар $n_0 = 0, n_+ = 1$ ё $n_0 = 0, n_- = 1$ бошад, мегӯянд, ки дар нуқтаи $(x_1^0,...,x_n^0)$ муодилаи (4.1) *навъи гиперболӣ* дорад.

Агар $n_0 = 0, n_+ > 1, n_- > 1$ бошад, мегӯянд, ки дар нуқтаи $(x_1^0,...,x_n^0)$ муодилаи (4.1) *навъи ултрагиперболӣ* дорад.

Агар $n_0 = 1$ бошад, мегӯянд, ки дар нуқтаи $(x_1^0,...,x_n^0)$ муодилаи (4.1) *навъи параболӣ* дорад.

Агар $n_0 > 1$ бошад, мегӯянд, ки дар нуқтаи $(x_1^0,...,x_n^0)$ муодилаи (4.1) *навъи ултрапараболӣ* дорад.

Ҳамин тариқ, дар ҳар як нуқтаи $(x_1^0,...,x_n^0) \in \Omega$ муодилаи (4.1) яке аз панҷ навъҳои дар боло зикршударо дорад.

Агар дар ҳар як нуқтаи соҳаи Ω муодилаи (4.1) *навъи эллипсӣ (гиперболӣ, ултрагиперболӣ, параболӣ, ултрапараболӣ)* дошта бошад, он гоҳ мегӯянд, ки муодилаи (4.1) дар соҳаи Ω *навъи эллипсӣ (гиперболӣ, ултрагиперболӣ, параболӣ, ултрапараболӣ)* дорад.

Агар ақаллан дар ду нуқтаҳои соҳаи Ω муодилаи (4.1) навъҳои гуногун дошта бошад, он гоҳ мегӯянд, ки дар соҳаи Ω муодилаи (4.1) *навъи омехта* дорад. Пас, муодилаҳои намуди (4.1) ҳангоми дар соҳа дида баромадан ба шаш навъ ҷудо мешаванд.

Якчанд мисолҳоро дида мебароем.

Мисоли 1. Муодилаи лаппишро дида мебароем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \right), \quad t > 0, \quad (x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Дар ҳар як нуқтаи $(t, x_1,...,x_n) \in \Omega = (0; +\infty) \times \mathbb{R}^n$ матритсаи ба он мувофиқ чунин намуд дорад:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -a^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -a^2 \end{pmatrix}$$

Қиматҳои хос аз ададҳои $1, -a^2, ..., -a^2$ иборатанд. Пас, $n_+ = 1, n_0 = 0$ буда, дар соҳаи Ω *муодилаи лаппиш навъи гиперболӣ* дорад.

Мисоли 2. Барои муодилаи гармипаҳншавӣ

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}, \quad t > 0, \quad (x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

матритсаи ба он мувофиқ

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

буда, $n_0 = 1$ аст. Пас, *муодилаи гармипаҳншавӣ навъи параболӣ* дорад.

Мисоли 3. Муодилаи Пуассон

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = f(x_1, ..., x_n), \quad (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$$

навъи эллипсӣ дорад. Чунки матритсаи ба он мувофиқ матритсаи воҳидӣ буда, $n_0 = 0, n_- = 0$ аст.

Мисоли 4. Муодилаи

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

-ро дида мебароем, ки *муодилаи Трикоми* меноманд. Матритсаи ба ин муодила мувофиқро тартиб медиҳем:

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Дар нуқтаи $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

1) $n_0 = 0, n_- = 0$ аст, агар $y > 0$ бошад;

2) $n_0 = 1$ аст, агар $y = 0$ бошад;

1) $n_0 = 0, n_+ = 1$ аст, агар $y < 0$ бошад.

Пас, *муодилаи Трикоми навъи омехта дорад.*

Акнун як ҳолати хусусии муодилаи (4.1) муодилаи намуди зеринро дида мебароем:

$$(4.2) \quad a(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \Phi(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) = 0,$$
$$(x, y) \in \Omega, \quad \Omega \subseteq \mathbb{R}^2,$$

ки ин ҷо $|a(x, y)| + |b(x, y)| + |c(x, y)| > 0, (x, y) \in \Omega$ мебошад. Матритсаи ба ин муодила мувофиқ чунин намуд дорад:

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} a(x, y) & b(x, y) \\ b(x, y) & c(x, y) \end{pmatrix}.$$

Барои нуқтаи $(x_0, y_0) \in \Omega$ қиматҳои хоси матритсаи $A^0 = A(x_0, y_0)$-ро меёбем:

$$det(A^0 - \lambda E) = 0,$$

$$det \begin{pmatrix} a(x_0, y_0) - \lambda & b(x_0, y_0) \\ b(x_0, y_0) & c(x_0, y_0) - \lambda \end{pmatrix} = 0,$$

$$\lambda^2 - (a(x_0, y_0) + c(x_0, y_0))\lambda + a(x_0, y_0)c(x_0, y_0) - b^2(x_0, y_0) = 0,$$

$$D(x_0, y_0) = (a(x_0, y_0) + c(x_0, y_0))^2 + 4(b^2(x_0, y_0) - a(x_0, y_0)c(x_0, y_0)) =$$
$$= 4b^2(x_0, y_0) + (a(x_0, y_0) - c(x_0, y_0))^2 \geq 0,$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{a(x_0, y_0) + c(x_0, y_0) \pm \sqrt{D(x_0, y_0)}}{2}.$$

Аз ин ҷо аён мегардад, ки

1) $n_0 = 0, n_+ = 1$ аст, агар $b^2 - ac > 0$ бошад;

2) $n_0 = 1$ аст, агар $b^2 - ac = 0$ бошад;

1) $n_0 = 0, n_+ = 0$ ё $n_0 = 0, n_- = 0$ аст, агар $b^2 - ac < 0$ бошад.

Пас, муодилаи (4.2) дар нуқтаи $(x_0, y_0) \in \Omega$

1) навъи гиперболӣ дорад, агар $\Delta(x_0, y_0) \equiv b^2(x_0, y_0) - a(x_0, y_0)c(x_0, y_0) > 0$ бошад.

2) навъи параболӣ дорад, агар $\Delta(x_0, y_0) = 0$ бошад.

3) навъи эллипсӣ дорад, агар $\Delta(x_0, y_0) < 0$ бошад.

Ҳамин тариқ, дар ҳар як нуқтаи $(x_0, y_0) \in \Omega$ муодилаи (4.2) фақат яке аз се навъҳои гиперболӣ, параболӣ, эллипсиро дошта метавонад.

Навъи ҳаргуна муодилаи намуди (4.2)-ро тавассути аломати ифодаи

$$\Delta(x, y) \equiv b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y)$$

муайян кардан бисёр қулай мебошад. Ҳангоми доимӣ будани функсияҳои $a(x, y), b(x, y), c(x, y)$ дар дилхоҳ соҳаи Ω муодила яке аз се навъҳои гиперболӣ, параболӣ, эллипсиро дошта метавонад. Аз ин рӯ, новобаста аз соҳа дар бораи навъи муодилаи (4.2)-и коэффитсиентҳояш доимӣ муҳокима рондан маъно дорад.

5. Ба намуди каноникӣ овардани муодилаҳои дифференсиалии тартиби дуюм

Муодилаи намуди (4.1)-ро дида мебароем. Чуноне ки дар параграфи гузашта зикр гардид, дар ҳар як нуқтаи $(x_1^0, ..., x_n^0) \in \Omega$ муодилаи (4.1) ба яке аз панҷ навъҳои гиперболӣ, эллипсӣ, параболӣ, ултрапараболӣ, ултрагиперболӣ таалуқ дорад.

Муодилаи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\right) = F_1(x_1, ..., x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}) \tag{5.1}$$

намуди каноникии муодилаи навъи гиперболӣ номида мешавад.

Муодилаи

$$\varepsilon_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + ... + \varepsilon_n \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = F_2(x_1, ..., x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}), \quad \varepsilon_k = -1 \text{ ё } 1 \tag{5.2}$$

намуди каноникии муодилаи навъи параболӣ номида мешавад.

Муодилаи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = F_3(x_1, ..., x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}) \tag{5.3}$$

намуди каноникии муодилаи навъи эллипсӣ номида мешавад.

Муодилаи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_{m+1}^2} - ... - \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = F_4(x_1, ..., x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}), \quad 2 \le m \le n-2 \tag{5.4}$$

намуди каноникии муодилаи навъи ултрагиперболӣ номида мешавад.

Муодилаи

$$(5.5)\quad \varepsilon_m \frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2} + ... + \varepsilon_n \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = F_5(x_1, ..., x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}),$$
$$m \geq 1, \varepsilon_k = -1 \text{ ё } 1$$

намуди каноникии муодилаи навъи ултрапараболӣ номида мешавад.

Муодилаҳое, ки аз муодилаҳои (5.1) - (5.5) дар натиҷаи ҷой иваз намудани тағйирёбандаҳои новобастаи $x_1, ..., x_n$ ҳосил мешаванд, инчунин муодилаҳои намудашон каноникӣ номида мешаванд.

Теоремаи 5.1. *Дар ҳар як нуқтаи* $(x_1^0, ..., x_n^0) \in \Omega$ *чунин табдилдиҳии ғайримахсуси*

$$(5.6)\qquad \xi_k = c_{k1}x_1 + ... + c_{kn}x_n, \quad k = \overline{1, n}$$

-и тағйирёбандаҳои новобаста мавҷуд аст, ки муодилаи (4.1)*-ро ба яке аз намудҳои каноникии* (5.1) - (5.5) *меоварад.*

Исбот. Аз рӯи матритсаи $A(x_1^0, ..., x_n^0) = (a_{ij}^0)_{ij=\overline{1,n}}$ шакли квадратии зеринро тартиб медиҳем:

$$(5.7)\qquad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^0 x_i x_j.$$

Аз алгебраи хаттӣ маълум аст, ки барои шакли квадратии мазкур чунин матритсаи ғайримахсуси $B = (b_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ мавҷуд аст, ки ҳангоми иҷрои гузориши

$$(5.8)\qquad x_k = b_{k1}y_1 + ... + b_{kn}y_n, \quad k = \overline{1, n}$$

шакли квадратӣ намуди каноникии зеринро мегирад:

$$\sum_{i,j=1}^{n} \xi_k y_k^2,$$

ки ин ҷо $m = n_+ + n_-, \varepsilon_k = 1$ ё 1 буда, шумораи ε_k-ҳои мусбат ба n_+ ва манфӣ ба n_- баробар аст. Пас, агар (5.8)-ро дар (5.7) гузорем:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^0 (b_{i1}y_1 + ... + b_{in}y_n)(b_{j1}y_1 + ... + b_{jn}y_n) = \sum_{k,l=1}^{n} \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^0 b_{ik} b_{jl} \right) y_k y_l,$$

бояд баробариҳои зерин ҷой дошта бошанд:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^0 b_{ik} b_{jl} = \begin{cases} 0, & \text{агар } k \neq l \\ \varepsilon_k, & \text{агар } k = l \leq m \\ 0, & \text{агар } k = l > m. \end{cases}$$

Матритсаи $C = (c_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$-ро чунин интихоб мекунем:

$$c_{ij} = b_{ji}, \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Он гоҳ аз рӯи формулаҳои

$$\varepsilon_k = c_{k1}x_1 + ... + c_{kn}x_n, \quad k = \overline{1, n}$$

дар муодилаи (4.1) ба тағйирёбандаҳои новобастаи нав гузашта, барои функсияи

$$\nu(\xi_1, ..., \xi_n) = u(\tilde{c}_{11}\xi_1 + ... + \tilde{c}_{1n}\xi_n, ..., \tilde{c}_{n1}\xi_1 + ... + \tilde{c}_{nn}\xi_n),$$

ки ин ҷо $\tilde{c}_{ij}, i,j = \overline{1,n}$ - элементҳои матритса ба C баръакс мебошанд, ҳосил мекунем:

$$u(x_1,...,x_n) = \nu(c_{11}x_1 + ... + c_{1n}x_n, ..., c_{n1}x_1 + ... + c_{nn}x_n),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1,...,x_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \nu}{\partial \xi_k}(\xi_1,...,\xi_n)\frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}, \quad i = \overline{1,n},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x_1,...,x_n) = \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial^2 \nu}{\partial \xi_k \partial \xi_l} \cdot \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \xi_l}{\partial x_j}, \quad i,j = \overline{1,n},$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^0 \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial^2 \nu}{\partial \xi_k \partial \xi_l} \cdot \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \xi_l}{\partial x_j} + \tilde{F} = 0,$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^0 \sum_{k,l=1}^{n} c_{ki}c_{lj} \frac{\partial^2 \nu}{\partial \xi_k \partial \xi_l} + \tilde{F} = 0,$$

$$\sum_{k,l=1}^{n} \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^0 c_{ki} c_{lj} \right) \frac{\partial^2 \nu}{\partial \xi_k \partial \xi_l} + \tilde{F} = 0,$$

$$\sum_{k,l=1}^{n} \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^0 b_{ik} b_{jl} \right) \frac{\partial^2 \nu}{\partial \xi_k \partial \xi_l} + \tilde{F} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k \frac{\partial^2 \nu}{\partial \xi_k^2} + \tilde{F} = 0.$$

Теорема исбот шуд.

Акнун муодилаи дифференсиалии

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}) = 0 \tag{5.9}$$

-ро дида мебароем. Функсияҳои $a(x,y), b(x,y), c(x,y)$ дар ягон соҳаи Ω муайян буда, ҳосилаҳои бефосилаи тартиби дуюмро доранд. Функсияи F дар соҳаи $\Omega \times \mathbb{R}^3$ муайян ва бефосила мебошад.

$$x = x_1 + y_1, \quad y = x_1 - y_1$$

ин шартро таъмин кардан мумкин аст. Минбаъд шарти $a(x,y) \neq 0 \quad \forall (x,y) \in \Omega_0$-ро иҷрошуда меҳисобем.

Муодилаҳои дифференсиалии зеринро тартиб медиҳем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b(x,y) \pm \sqrt{\Delta(x,y)}}{a(x,y)}$$

ва ҳал мекунем. Агар $\varphi(x,y) = C_1, \psi(x,y) = C_2$ ҳалҳои умумии муодилаҳо бошанд, тағйирёбандаҳои нави ξ, η-ро аз рӯи формулаҳои

$$\xi = \varphi(x,y), \quad \eta = \psi(x,y)$$

муайян мекунем. Аз рӯи ин формулаҳо дар муодилаи дифференсиалии (5.9) аз тағйирёбандаҳои новобастаи x, y ба тағйирёбандаҳои новобастаи нави ξ, η гузаштан лозим аст. Ҳангоми гузариш аз формулаҳои зерини аз курси таҳлили математикӣ маълум истифода бурдан лозим аст:

$$u(x,y) = \nu(\varphi(x,y), \psi(x,y)) = \nu(\xi, \eta),$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \nu}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \cdot \frac{\partial \nu}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial \xi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \nu}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \cdot \frac{\partial \nu}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial^2 \nu}{\partial \xi^2} + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \cdot \frac{\partial^2 \nu}{\partial \xi \partial \eta} + \\ + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial^2 \nu}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} \frac{\partial \nu}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} \frac{\partial \nu}{\partial \eta}, \end{cases}$$

Теоремаи 5.2. *Бигзор муодилаи (5.9) дар ягон атрофи нуқтаи $(x_0, y_0) \in \Omega$ яке аз навъҳои гиперболӣ, параболӣ, эллипсиро дошта бошад. Он гоҳ чунин функсияҳои дар атрофи нуқтаи (x_0, y_0) ду маротиба бефосила дифференсиронидашавандаи $\varphi(x,y), \psi(x,y)$ мавҷуданд, ки дар ин атроф*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} \neq 0$$

буда, тавассути гузориши

$$\xi = \varphi(x,y), \eta = \psi(x,y) \tag{5.10}$$

муодилаи (5.9) ба намуди каноникӣ оварда мешавад.

Теоремаи 5.1 ба намуди каноникӣ овардани муодиларо дар нуқта тасдиқ мекунад. Теоремаи 5.2 бошад, ба намуди каноникӣ овардани муодиларо дар атрофи нуқта тасдиқ мекунад, ба шарте ки дар нуқтаҳои ин атроф навъи муодила якхела бошад. Ҳангоми $n > 2$ будан, барои муодилаи (4.1) тасдиқоти ба теоремаи 5.2 монанд ба таври умум ҷой надорад.

Ба исботи теоремаи 5.2 машғул нашуда, танҳо тарзҳои ёфтани гузориши (5.10)-ро вобаста ба аломати функсияи

$$\Delta(x,y) \equiv b^2(x,y) - a(x,y)c(x,y)$$

дар атрофи нуқтаи (x_0, y_0) шарҳ медиҳем.

Бигзор дар ягон атрофи Ω_0-и нуқтаи (x_0, y_0) муодилаи (5.9) навъи гиперболӣ дошта бошад:

$$\Delta(x,y) > 0, \quad (x,y) \in \Omega_0$$

Шарти $\forall (x,y) \in \Omega_0 \ a(x,y) \neq 0$ ё $\forall (x,y) \in \Omega_0 \ c(x,y) \neq 0$-ро ҷой дошта ҳисобидан мумкин аст. Агар ин тавр набошад, тавассути гузаштан ба тағйирёбандаҳои нави x_1, y_1:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 \nu}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial^2 \nu}{\partial \xi \partial \eta} + \\ + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 \nu}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \frac{\partial \nu}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \frac{\partial \nu}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 \nu}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial^2 \nu}{\partial \xi \partial \eta} + \\ + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 \nu}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \frac{\partial \nu}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \frac{\partial \nu}{\partial \eta}. \end{cases} \tag{5.11}$$

Дар натиҷа муодилаи намуди зерин ҳосил мешавад:

$$\frac{\partial \nu}{\partial \xi \partial \eta} + \Phi_1(\xi, \eta, \nu, \frac{\partial \nu}{\partial \xi}, \frac{\partial \nu}{\partial \eta}) = 0. \tag{5.12}$$

Аз ин муодила тавассути гузориши

$$\xi = \xi_1 + \eta_1, \eta = \xi_1 - \eta_1,$$

$$\nu(\xi, \eta) = \nu(\xi_1 + \eta_1, \xi_1 - \eta_1) = \omega(\xi_1, \eta_1)$$

муодилаи намуди

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi_1^2} - \frac{\partial^2\omega}{\partial\eta_1^2} = \Phi_2(\xi_1, \eta_1, \omega, \frac{\partial\omega}{\partial\xi_1}, \frac{\partial\omega}{\partial\eta_1}) \tag{5.13}$$

ҳосил мешавад. Муодилаҳои (5.12), (5.13) намудҳои каноникии муодилаи навъи гиперболӣ номида мешаванд.

Бигзор

$$\Delta(x,y) = 0, \quad (x,y) \in \Omega_0$$

бошад. Муодилаи дифференсиалии

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b(x,y)}{a(x,y)}$$

-ро ҳал мекунем. Агар $\varphi_0(x,y) = C$ ҳалли умумии муодила бошад, дар гузориши (5.10) ба сифати $\varphi(x,y)$ функсияи $\varphi_0(x,y)$-ро мегирем. Ба сифати $\psi(x,y)$ ягон функсияи ду маротиба дар Ω_0 дифференсиронидашавандаеро интихоб мекунем, ки шарти

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial x} \neq 0 \quad \forall(x,y) \in \Omega_0 \tag{5.14}$$

-ро қаноат кунонад. Он гоҳ тавассути гузориши (5.10), бо истифода аз формулаҳои (5.11) намуди каноникии муодилаи навъи параболӣ ҳосил мешавад:

$$\frac{\partial^2\nu}{\partial\eta^2} = \Phi_3(\xi, \eta, \nu, \frac{\partial\nu}{\partial\xi}, \frac{\partial\nu}{\partial\eta}).$$

Агар $c(x,y) \neq 0$ $\forall(x,y) \in \Omega_0$ ва $\psi_0(x,y) = C$ ҳалли умумии муодилаи

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b(x,y)}{c(x,y)}$$

бошанд, ба сифати $\psi(x,y)$ функсияи $\psi_0(x,y)$-ро мегирем. Ба сифати $\psi(x,y)$ ягон функсияи шарти (5.14)-ро қаноат мекунондагиро мегирем. Дар натиҷа тавассути гузориши (5.10) муодилаи намуди каноникии зеринро ҳосил мекунем:

$$\frac{\partial^2\nu}{\partial\xi^2} = \Phi_4(\xi, \eta, \nu, \frac{\partial\nu}{\partial\xi}, \frac{\partial\nu}{\partial\eta}).$$

Бигзор $\Delta(x,y) < 0$, $(x,y) \in \Omega_0$ бошад. Чунин ҳалли $\omega(x,y)$-и муодилаи дифференсиалии

$$\frac{\partial\omega}{\partial x} + \frac{b(x,y) + i\sqrt{|\Delta(x,y)|}}{a(x,y)}\frac{\partial\omega}{\partial y} = 0 \tag{5.15}$$

-ро меёбем, ки дар Ω_0 шарти $\frac{\partial\omega}{\partial y} \neq 0$-ро қаноат кунонад. Яке аз тарзҳои маъмули ёфтани функсияи $\omega(x,y)$ чунин мебошад:

1) муодилаи дифференсиалии оддии

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b(x,y) + i\sqrt{|\Delta(x,y)|}}{a(x,y)}$$

-ро тартиб дода, ҳалли умумияшро меёбанд;

2) агар $\omega(x,y) = C$ ҳалли умумии ин муодила бошад, месанҷанд, ки функсияи $\omega(x,y)$ ҳалли муодилаи (5.15) шуда, шарти $\frac{\partial\omega}{\partial y} \neq 0$-ро қаноат мекунонад ё не.

Агар $\omega(x,y) = \varphi_1(x,y) + i\psi_1(x,y)$ ҳалли шарти $\frac{\partial\omega}{\partial y} \neq 0$-ро қонеъкунандаи муодилаи (5.15) бошад, дар гузориши (5.10) ба сифати функсияҳои φ, ψ мувофиқан функсияҳо φ_1, ψ_1-ро мегирем. Дар натиҷаи гузориши (5.10) намуди каноникии муодилаи навъи эллипсӣ ҳосил мешавад:

$$\frac{\partial^2 \nu}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \nu}{\partial \eta^2} = \Phi_5(\xi, \eta, \nu, \frac{\partial \nu}{\partial \xi}, \frac{\partial \nu}{\partial \eta}).$$

Бо ду мисол татбиқи теоремаҳои 5.1 ва 5.2-ро дида мебароем.

Мисоли 1. Бигзор муодилаи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = 0$$

дода шуда бошад. Матритсаи ба ин муодила мувофиқро тартиб медиҳем:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Қиматҳои хоси матритсаи A ададҳои -1, 1, 3 мебошанд. Пас $n_+ = 2, n_- = 1, n_0 = 0$ буда, муодила навъи гиперболӣ дорад.

Шакли квадратии мувофиқро тартиб медиҳем:

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} x_i x_j = x_1^2 + 4x_1 x_2 + x_2^2 + x_3^2.$$

Ба тағйирёбандаҳои нави y_1, y_2, y_3 гузашта, шакли квадратиро ба намуди каноникӣ меорем. Барои ин чунин табдилдиҳӣ мегузаронем:

$$x_1^2 + 4x_1 x_2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + 2x_2)^2 - (\sqrt{3}x_2)^2 + x_3^2.$$

Агар $y_1 = x_1 + 2x_2, y_2 = \sqrt{3}x_2, y_3 = x_3$ гирем, шакли квадратӣ намуди каноникии зайлро мегирад:

$$y_1^2 - y_2^2 + y_3^2.$$

Пас,

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - \frac{2}{\sqrt{3}} y_2 \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

ва

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

аст. Аз ин ҷо ҳосил мекунем, ки

$$C = B^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

мебошад. Бинобарон барои муодилаи дифференсиалии додашударо ба намуди каноникӣ овардан аз рӯи формулаҳои

$$\xi_1 = x_1, \xi_2 = -\frac{2}{\sqrt{3}} x_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} x_2, \xi_3 = x_3$$

ба тағйирёбандаҳои новобастаи нави ξ_1, ξ_2, ξ_3 гузаштан лозим аст. Дар ҳосилаҳои функсияи u ба тағйирёбандаҳои ξ_1, ξ_2, ξ_3 мегузарем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 \nu}{\partial \xi_1^2} - \frac{4}{\sqrt{3}}\frac{\partial^2 \nu}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} + \frac{4}{\sqrt{3}}\frac{\partial^2 \nu}{\partial \xi_2^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\partial^2 \nu}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} - \frac{2}{3}\frac{\partial^2 \nu}{\partial \xi_2^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = \frac{1}{3}\frac{\partial^2 \nu}{\partial \xi_2^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = \frac{\partial^2 \nu}{\partial \xi_3^2}.$$

Ин қиматҳоро дар муодила гузошта, ҳосил мекунем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_3^2} = 0$$

- намуди каноникии муодила.

Мисоли 2. Дар атрофи нуқтаи (0,1) муодилаи Трикомиро дида мебароем:

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Дар атрофи нуқтаи мазкур навъи муодила эллипсӣ мебошад. Чунки

$$a(x,y) = y, b(x,y) = 0, c(x,y) = 1, \Delta(x,y) = -y, \Delta(0,1) = -1 < 0$$

аст. Дар атрофи ин нуқта муодиларо ба намуди каноникӣ меорем.

Ҳалли умумии муодилаи дифференсиалии

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b(x,y) + i\sqrt{|\Delta(x,y)|}}{a(x,y)}$$

-ро меёбем:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{i}{\sqrt{y}},$$

$$\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} - ix = C.$$

Месанҷем, ки функсияи $\omega = \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} - ix$ дар ягон атрофи нуқтаи $(0,1)$ ҳалли муодилаи

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{i}{\sqrt{y}}\frac{\partial \omega}{\partial y} = 0$$

шуда, шарти $\frac{\partial \omega}{\partial y} \neq 0$-ро қаноат мекунонад ё не:

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} = \sqrt{y}, \frac{\partial \omega}{\partial x} = -i, \frac{\partial \omega}{\partial y}(0,1) = 1 \neq 0,$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{i}{\sqrt{y}}\frac{\partial \omega}{\partial y} = -i + \frac{i}{\sqrt{y}} \cdot \sqrt{y} = 0.$$

Пас $\xi = \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}, \eta = -x$ мегирем. Аз рӯи ин формулаҳо дар муодилаи дифференсиалӣ ба тағйирёбандаҳои новобастаи нави ξ, η мегузарем. Барои ин аз формулаҳои (5.11) истифода мебарем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \nu}{\partial \eta^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = y\frac{\partial^2 \nu}{\partial \xi^2} + \frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{\partial \nu}{\partial \xi}.$$

Ин қиматҳоро дар муодила мегузорем:

$$y\frac{\partial^2\nu}{\partial\eta^2}+y\frac{\partial^2\nu}{\partial\xi^2}+\frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{\partial\nu}{\partial\xi}=0,$$

$$\frac{\partial^2\nu}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\nu}{\partial\eta^2}+\frac{1}{2y\sqrt{y}}\frac{\partial\nu}{\partial\xi}=0.$$

Агар $y=(\frac{3}{2}\xi)^{2/3}$ гузорем, муодила чунин намуд мегирад:

$$\frac{\partial^2\nu}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\nu}{\partial\eta^2}+\frac{1}{3\xi}\frac{\partial\nu}{\partial\xi}=0$$

- намуди каноникии муодила.

6. Корректнокии масъалаҳои физикаи математикӣ

Дар параграфи якум зикр гардида буд, ки барои тавсифи пурраи ҳодисаҳои тадқиқшаванда муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусиро ҳамроҳи шартҳои аввалаю канорӣ меомӯзанд. Агар ҳалли шартҳои аввалаdensаро қаноаткунандаи муодилаи дифференсиалӣ ҷустуҷӯ карда шавад, ин масъаларо *масъалаи Коши* меноманд. Ҳалли шартҳои канориро қаноат мекардагии муодиларо ёфтанӣ бошем, ингуна масъаларо *масъалаи канорӣ* меноманд. Масъалаи ёфтани ҳалли шартҳои аввалаю канориро қонеъкунандаи муодилаи дифференсиалиро *масъалаи омехта* меноманд. Ин се намуд масъалаҳоро *масъалаҳои физикаи математикӣ* меноманд.

Мегӯянд, ки масъалаи физикаи математикӣ *корректӣ* (дуруст) аст, агар дар ягон синфи функсияҳои M шартҳои зерин иҷро шаванд:

1) ҳалли масъала дар синфи M мавҷуд аст;

2) ҳалли дар M мавҷудбуда ягон аст;

3) ҳал аз функсияҳои маълуми дар масъала додашуда - аъзои озод, функсияҳои аввалаю канорӣ бефосила вобаста аст.

Дар ин ҳолат синфи M-ро *синфи корректнокии* масъалаи додашуда меноманд.

Ба таври умум бефосила вобастагии ҳал аз додашудаҳои масъала, ки зикрашон дар боло гузашт, чунин маъно дорад, ки агар додашудаҳои масъаларо каме тағйир диҳем, ҳалли масъалаи тағйирёфта аз ҳалли масъалаи аввала низ кам фарқ мекунад.

Дар параграфҳои минбаъда мо асосан ба тадқиқи корректӣ будани масъалаҳои Коши, канорӣ, омехта барои муодилаҳои дифференсиалии тартиби дуюми навъҳои гиперболӣ, параболӣ ва эллипсӣ машғул мешавем.

Маълум мешавад, ки на ҳаргуна масъала корректӣ аст. Олими франсуз Адамар аввалин маротиба нишон дод, ки масъалаи Коши барои муодилаи Лаплас корректӣ нест. Барои исботи ин тасдиқот Адамар мисоли зеринро овард.

Мисоли Адамар. Масъалаи Коши

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\quad t>0,\quad x\in\mathbb{R},$$

$$u(0,x)=0,\quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x)=\frac{1}{k}\sin kx,\quad x\in\mathbb{R}$$

-ро дида мебароем. Функсияи

$$u_k(t,x)=\frac{1}{k^2}\operatorname{sh}kt\cdot\sin kx$$

ҳалли масъала мебошад. Ҳангоми $k \to +\infty$ мунтазам нисбат ба $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{k}\sin kx \rightrightarrows 0$$

аст. Лекин барои қиматҳои $x = \pi n, n = 0, \pm 1, ...$ ҳангоми $x \to \infty$

$$u_k(t,x) \nrightarrow 0$$

аст. Яъне ҳалли масъала аз шарти аввала бефосила вобаста нест. Пас масъалаи Коши барои муодилаи Лаплас корректӣ намебошад.

Ҳамаи масъалаҳое, ки минбаъд меомӯзем, корректӣ мебошанд. Масъалаҳоеро, ки корректӣ намебошанд, *масъалаҳои ғайрикорректӣ* меноманд. Тадқиқи бисёре аз ҳодисаҳои физикӣ ба масъалаҳои ғайрикорректӣ меоранд. Аз ин рӯ, омӯзиши ингуна масъалаҳо аз аҳамият холӣ намебошад. Ба омӯзиши ҳаматарафаи масъалаҳои ғайрикорректӣ академик Тихонов А.Н. ибтидо гузошт. Ӯ методҳоеро кор карда баромад, ки тавассути ин методҳо масъалаҳои ғайрикорректӣ бо ёрии масъалаҳои корректӣ ҳал карда мешаванд.