Боби II. Муодилаҳои навъи гиперболӣ

Дар боби мазкур корректнокии масъалаҳои Коши ва омехта барои муодилаҳои навъи гиперболӣ дар мисоли муодилаи намуди

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \right) + f(t, x_1, ..., x_n)$$

омӯхта мешавад. Инчунин баъзе хосиятҳои фарқкунандаи муодилаҳои навъи гиперболӣ мавриди омӯзиш қарор мегиранд.

7. Гузориши масъалаҳо барои муодилаҳои навъи гиперболӣ

Муодилаи зеринро дида мебароем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \right) + f(t, x_1, ..., x_n). \tag{7.1}$$

Ин ҷо a - доимии мусбат, функсияи $f(t, x_1, ..., x_n)$ дар сарбасти ягон соҳаи

$$Q = (0; T) \times \Omega, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

муайян ва бефосила мебошад.

Агар $\Omega = \mathbb{R}^n$ бошад, барои муодилаи (7.1) масъалаи Коши гузошта мешавад.

Масъалаи Коши. Функсияи $u \in C^2((0; T) \times \mathbb{R}^n) \cap C^{1,0}([0; T) \times \mathbb{R}^n)$ ёфта шавад, ки ҳангоми $(t, x) \in (0; T) \times \mathbb{R}^n$ ҳалли муодилаи (7.1) буда, шартҳои аввалаи зеринро қаноат кунонад:

$$\begin{cases} u(0, x_1, ..., x_n) = \varphi(x_1, ..., x_n), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x_1, ..., x_n) = \psi(x_1, ..., x_n). \end{cases} \tag{7.2}$$

Ин ҷо функсияҳои $\varphi, \psi \in C(\mathbb{R}^n)$ дода мешаванд. $C^{1,0}([0; T) \times \Omega)$ маҷмӯи функсияҳои дар $[0; T) \times \Omega$ бефосила ва нисбат ба t ҳосилаи бефосила доштаро ифода мекунад.

Агар Ω сарҳади суфта дошта бошад, барои муодилаи (7.1) масъалаҳои омехта гузошта мешаванд.

Масъалаи омехтаи I. Функсияи $u \in C^2(Q) \cap C^{1,0}([0; T) \times \overline{\Omega})$ ёфта шавад, ки дар соҳаи Q ҳалли муодилаи (7.1) бошад, дар $\overline{\Omega}$ шартҳои аввалаи (7.2)-ро қаноат кунонад ва шарти канории зерин иҷро шавад:

$$u(t, x_1, ..., x_n)\big|_{\partial\Omega} = \mu_1(t, x_1, ..., x_n), \quad 0 \le t \le T. \tag{7.3}$$

Ин ҷо $\mu_1(t, x_1, ..., x_n)$ функсияи додашудаи дар ягон атрофи маҷмӯи $[0; T] \times \partial\Omega$ муайян ва бефосила мебошад. Шарти канории (7.3)-ро *шарти канории Дирихле* меноманд.

Масъалаи омехтаи II. Функсияи $u \in C^2(Q) \cap C^1(\overline{Q})$ ёфта шавад, ки шартҳои зеринро қаноат кунонад:

1) ҳангоми $(t, x_1, ..., x_n) \in Q$ будан, ҳалли муодилаи (7.1) аст;
2) барои $(x_1, ..., x_n) \in \overline{\Omega}$ шартҳои аввалаи (7.2) иҷро мешаванд;
3) барои $t \in [0; T], (x_1, ..., x_n) \in \partial\Omega$ шарти канории

$$\frac{\partial u}{\partial p}(t, x_1, ..., x_n) = \mu_2(t, x_1, ..., x_n) \tag{7.4}$$

иҷро мешавад.

Шарти канории (7.4)-ро *шарти канории Нейман* меноманд. Дар ин ҷо μ_2 функсияи додашуда, p вектор - нормали дар нуқтаи $(x_1, ..., x_n)$ ба сатҳи $\partial\Omega$ гузаронида шуда мебошанд.

Масъалаи омехтаи III. Функсияи $u \in C^2(Q) \cap C^1(\overline{Q})$ ёфта шавад, ки шартҳои 1), 2)-и масъалаи омехтаи дуюм ва шарти канории зеринро қаноат кунонад:

$$(\frac{\partial u}{\partial p} + \sigma u)\big|_{\partial\Omega} = \mu_3, \quad 0 \le t \le T. \tag{7.5}$$

Шарти канории (7.5)-ро *шарти канории Робен* меноманд. Дар он функсияҳои $\sigma(t, x_1, ..., x_n), \mu_3(t, x_1, ..., x_n)$ дода мешаванд.

Ба ғайр аз масъалаҳои баён намуда барои муодилаҳои навъи гиперболӣ боз як масъала гузошта мешавад, ки бо номи *масъалаи Гурс ё масъала дар характеристикаҳо* маъмул аст. Гузориши масъалаи Гурсро барои муодилаи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)u = f(x, y), \tag{7.6}$$
$$(x, y) \in \Pi, \quad \Pi = (0; x_0) \times (0; y_0)$$

дида мебароем, ки ин $a, b, c, f \in C(\overline{\Pi})$ аст.

Масъалаи Гурс. Функсияи $u \in C^2(\Pi) \cap C(\overline{\Pi})$ ёфта шавад, ки дар Π ҳалли муодилаи (7.6) буда, шартҳои зеринро қаноат кунонад:

$$\begin{cases} u(0, y) = \varphi(y), & 0 \le y \le y_0, \\ u(x, 0) = \psi(x), & 0 \le x \le x_0. \end{cases} \tag{7.7}$$

Ин ҷо барои функсияҳои додашудаи $\varphi \in C[0; y_0]$, $\psi \in C[0; x_0]$ бояд шарти $\varphi(0) = \psi(0)$ иҷро шавад. Шартҳои (7.7)-ро *шартҳо дар характеристикаҳо* меноманд. Чунки порчаҳои $[0; x_0] \times \{0\}$, $\{0\} \times [0; y_0]$-и ҳамворӣ характеристикаҳои муодилаи (7.6) мебошанд.

8. Масъалаи Коши барои муодилаи лаппиши тори номаҳдуд

Масъалаи Кошии

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t, x), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R} \tag{8.1}$$

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R} \tag{8.2}$$

-ро дида мебароем. Ҳалли масъаларо дар намуди

$$u(t, x) = u_1(t, x) + u_2(t, x) \tag{8.3}$$

ҷустуҷӯ мекунем, ки ин ҷо функсияи $u_1(t, x)$ ҳалли масъалаи

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R} \tag{8.4}$$

$$u_1(0, x) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u_1}{\partial t}(0, x) = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R} \tag{8.5}$$

ва функсияи $u_2(t, x)$ ҳалли масъалаи

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + f(t, x), t > 0, x \in \mathbb{R} \tag{8.6}$$

$$u_2(0, x) = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial t}(0, x) = 0, \quad x \in \mathbb{R} \tag{8.7}$$

мебошанд.

Леммаи 8.1. *Масъалаи (8.4) - (8.5) коррективӣ аст.*

Исбот. Муодилаи (8.4) навъи гиперболӣ дошта, тавассути гузориши

$$\xi = x - at, \quad \eta = x + at,$$

$$\nu(\xi, \eta) = u_1(\frac{-\xi + \eta}{2a}, \frac{\eta + \xi}{2})$$

ба муодилаи

$$\frac{\partial^2 \nu}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

оварда мешавад. Ҳалли умумии ин муодила чунин намуд дорад:

$$\nu(\xi, \eta) = \Phi_1(\xi) + \Phi_2(\eta),$$

ки ин ҷо Φ_1, Φ_2 функсияҳои ихтиёрии дар $\mathbb{R}$ бефосила дифференсиронидашаванда мебошанд. Пас ҳалли умумии муодилаи (8.4) чунин намуд дорад:

$$u_1(t, x) = \Phi_1(x - at) + \Phi_2(x + at).$$

Функсияҳои Φ_1, Φ_2-ро тавре интихоб мекунем, ки функсияи $u_1(t, x)$ шартҳои аввалаи (8.5)-ро қаноат кунонад. Барои ин формулаи ҳалли умумиро дар (8.5) мегузорем:

$$u_1(0, x) = \varphi(x), \quad \Phi_1(x) + \Phi_2(x) = \varphi(x),$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}(0, x) = \psi(x), \quad -a\Phi_1'(x) + a\Phi_2'(x) = \psi(x).$$

Аз ин ҷо ҳосил мекунем:

$$\begin{cases} \Phi_1(x) + \Phi_2(x) = \varphi(x) \\ -\Phi_1(x) + \Phi_2(x) = \frac{1}{a}\int\limits_0^x \psi(s)ds + C, \end{cases}$$

$$\Phi_1(x) = \frac{\varphi(x)}{2} - \frac{1}{2a}\int\limits_0^x \psi(s)ds - \frac{C}{2},$$

$$\Phi_2(x) = \frac{\varphi(x)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_0^x \psi(s)ds + \frac{C}{2}.$$

Ин қиматҳоро дар формулаи ҳалли умумӣ гузошта, ҳалли масъалаи (8.4) - (8.5)-ро ҳосил мекунем:

$$u_1(t, x) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(s)ds. \tag{8.8}$$

Аз формулаи (8.8) ва тарзи ёфтани он аён мегардад, ки ҳалли масъалаи (8.4) - (8.5) мавҷуд, ягона ва аз функсияҳои φ, ψ бефосила вобаста аст. Яъне масъалаи мазкур коррективӣ аст. Лемма исбот шуд.

Леммаи 8.2. *Агар функсияи $w(t, x, \xi), t, \xi \in [0; +\infty), x \in \mathbb{R}$ ҳалли масъалаи*

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad t > 0, \xi > 0, x \in \mathbb{R} \\ w(0, x, \xi) = 0, \frac{\partial w}{\partial t}(0, x, \xi) = f(\xi, x) \end{cases} \tag{8.9}$$

бошад, он гоҳ функсияи

$$u_2(t,x) = \int\limits_0^t w(t-\xi, x, \xi)d\xi \tag{8.10}$$

ҳалли масъалаи (8.6) - (8.7) *мешавад.*

Исбот. Дурустии тасдиқоти леммаро бевосита месанҷем:

$u_2(0,x) = \int\limits_0^0 w(0-\xi,x,\xi)d\xi = 0,$

$\frac{\partial u_2}{\partial t}(t,x) = w(0,x,t) + \int\limits_0^t \frac{\partial w}{\partial t}(t-\xi,x,\xi)d\xi = \int\limits_0^t \frac{\partial w}{\partial t}(t-\xi,x,\xi)d\xi, \quad \frac{\partial u_2}{\partial t}(0,x) = 0,$

$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}(t,x) = \frac{\partial w}{\partial t}(0,x,t) + \int\limits_0^t \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(t-\xi,x,\xi)d\xi = f(t,x) + \int\limits_0^t a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(t-\xi,x,\xi)d\xi =$
$= f(t,x) + a^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}(t,x).$

Лемма исбот шуд.

Леммаи (8.2) бо номи *принсипи Дюамел* маълум аст. Ин принсип имконият медиҳад, ки ҳалли муодилаи ғайриякҷинсаро тавассути ҳалли муодилаи якҷинса ёбем. Принсипи Дюамел барои ёфтани ҳалли дигар муодилаҳои диференсиалӣ низ истифода бурда мешавад, ки минбаъд хоҳем дид. Яке аз вариантҳои тадбиқи принсипи мазкур барои муодилаҳои диференсиалии оддии хаттӣ *методи вариатсияи доимӣ* мебошад.

Леммаи (8.2)-ро истифода бурда ҳалли масъалаи (8.6) - (8.7)-ро меёбем. Пеш аз ҳама бо истифода аз формулаи (8.8) ҳалли масъалаи (8.9)-ро меёбем:

$$w(t,x,\xi) = \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} f(\xi,s)ds.$$

Пас мувофиқи формулаи (8.10)

$$u_2(t,x) = \frac{1}{2a}\int\limits_0^t \int\limits_{x-a(t-\xi)}^{x+a(t-\xi)} f(\xi,s)dsd\xi \tag{8.11}$$

мешавад. Формулаҳои (8.8), (8.11)-ро дар (8.3) гузошта, формулаи ҳалли масъалаи (8.1) - (8.2)-ро ҳосил мекунем:

(8.12)

$$u(t,x) = \frac{1}{2}(\varphi(x-at) + \varphi(x+at)) + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(s)ds + \frac{1}{2a}\int\limits_0^t \int\limits_{x-a(t-\xi)}^{x+a(t-\xi)} f(\xi,s)dsd\xi.$$

Ин формула бо номи *формулаи Д'Аламбер* маълум аст.

Аз формулаи Д'Аламбер собит мегардад, ки ҳалли масъалаи (8.1) - (8.2) мавҷуд аст. Ва аз леммаи 8.1 бармеояд, ки ин ҳал ягона мебошад. Аз формулаи (8.12) инчунин аён аст, ки ҳалли масъала аз функсияҳои φ, ψ, f бефосила вобаста аст. Ҳамин тариқ, ба хулосаи зерин меоем.

Теоремаи 8.1. *Масъалаи Кошии* (8.1) - (8.2) *коррект̄и буда, ҳалли он тавассути формулаи Д'Аламбер ёфта мешавад.*

9. Масъалаи Коши барои муодилаи навъи гиперболӣ: ҳолатҳои $n = 2, 3$

Масъалаи Кошии зеринро дида мебароем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}, t > 0, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \tag{9.1}$$

$$\begin{cases} u(0, x_1, x_2, x_3) = \varphi(x_1, x_2, x_3), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x_1, x_2, x_3) = \psi(x_1, x_2, x_3), (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3. \end{cases} \tag{9.2}$$

Теоремаи 9.1. *Бигзор $\varphi \in C^3(\mathbb{R}^3), \psi \in C^2(\mathbb{R}^3)$ бошанд. Он гоҳ масъалаи (9.1) - (9.2) корректӣ буда, ҳалли он тавассути формулаи зерин ёфта мешавад:*

$$u(t, x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{4\pi t} \iint\limits_{S_t(x_1, x_2, x_3)} \varphi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) d\sigma_t + \tag{9.3}$$

$$+ \frac{1}{4\pi t} \iint\limits_{S_t(x_1, x_2, x_3)} \psi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) d\sigma_t$$

- формулаи Кирхгоф.

Интегралҳои дар формулаи мазкур иштироккунанда интегралҳои сатҳӣ буда, $S_t(x_1, x_2, x_3)$ сфераи марказаш дар нуқтаи (x_1, x_2, x_3) ва радиусаш t дар фазои $\mathbb{R}^3$ мебошад:

$$S_t(x_1, x_2, x_3) = \{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3 : (\alpha_1 - x_1)^2 + (\alpha_2 - x_2)^2 + (\alpha_3 - x_3)^2 = t^2\}.$$

Исботи теорема. Пеш аз ҳама месанҷем, ки функсияи аз рӯи формулаи (9.3) додашуда ҳалли масъалаи (9.1) - (9.2) мебошад. Агар чунин ишорат кунем:

$$u_\varphi(t, x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{4\pi t} \iint\limits_{S_t(x_1, x_2, x_3)} \varphi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) d\sigma_t, \tag{9.4}$$

он гоҳ, формулаи (9.3) намуди зеринро мегирад:

$$u = \frac{\partial u_\varphi}{\partial t} + u_\psi. \tag{9.5}$$

Леммаи 9.1. *Функсияи u_φ ҳалли муодилаи (9.1) буда, шартҳои аввалаи*

$$\begin{cases} u(0, x_1, x_2, x_3) = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x_1, x_2, x_3) = \varphi(x_1, x_2, x_3) \end{cases} \tag{9.6}$$

-ро қаноат мекунонад.

Исботи лемма. Азбаски

$$|u_\varphi(t, x_1, x_2, x_3)| \leq \frac{1}{4\pi t} \iint\limits_{S_t} |\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)| d\sigma_t \leq \frac{1}{4\pi t} \cdot \max_{S_t} |\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)| \cdot \iint\limits_{S_t} d\sigma_t =$$

$$= \frac{1}{4\pi t} \cdot \max_{S_t} |\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)| \cdot 4\pi t^2 = t \cdot \max_{S_t} |\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)|$$

аст, пас

$$u_\varphi(0, x_1, x_2, x_3) = \lim_{t \to 0} u_\varphi(t, x_1, x_2, x_3) = 0$$

мешавад. Агар дар интеграли сатҳии формулаи (9.4) гузориши зеринро иҷро кунем:

$$\alpha_k = x_k + \beta_k t, \quad k = 1, 2, 3,$$

он чунин намуд мегирад:

$$u_\varphi(t, x_1, x_2, x_3) = \frac{t}{4\pi} \iint\limits_{S_1: \beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2=1} \varphi(x_1 + t\beta_1, x_2 + t\beta_2, x_3 + \beta_3) d\sigma_1. \tag{9.7}$$

Аз ин ҷо ҳосил мекунем:

$$\frac{\partial u_\varphi}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{S_1} \varphi(x_1 + t\beta_1, x_2 + t\beta_2, x_3 + t\beta_3) d\sigma_1 +$$

$$+ \frac{t}{4\pi} \iint\limits_{S_1} \sum_{\kappa=1}^{3} \beta_\kappa \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_\kappa}(x_1 + t\beta_1, x_2 + t\beta_2, x_3 + t\beta_3) d\sigma_1.$$

Аз ин баробарӣ аён мегардад, ки

$$\frac{\partial u_\varphi}{\partial t}(0, x_1, x_2, x_3) = \varphi(x_1, x_2, x_3)$$

аст. Ҳамин тариқ, нишон додем, ки функсияи u_φ шартҳои аввалаи (9.6) - ро қаноат мекунонад.

Акнун ҳалли муодилаи (9.1) будани функсияи u_φ-ро месанҷем. Формулаи (9.7)-ро истифода бурда ба осонӣ санҷидан мумкин аст, ки баробариҳои зерин ҷой доранд:

$$\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial x_3^2} = \frac{t}{4\pi} \iint\limits_{S_1} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha_3^2} \right) d\sigma_1 =$$

$$= \frac{1}{4\pi t} \iint\limits_{S_t(x_1,x_2,x_3)} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha_3^2} \right) d\sigma_t,$$

$$\frac{\partial u_\varphi}{\partial t} = \frac{u_\varphi}{t} + \frac{1}{4\pi t} \iint\limits_{S_t(x_1,x_2,x_3)} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_1} d\alpha_2 d\alpha_3 + \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_2} d\alpha_1 d\alpha_3 + \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_3} d\alpha_1 d\alpha_2\right) =$$

(ин ҷо аз интеграли сатҳии ҷинси якӯм ба интеграли сатҳии ҷинси дуюм гузаштем)

$$= \frac{u_\varphi}{t} + \frac{1}{4\pi t} \iiint\limits_{V_t(x_1,x_2,x_3): x_1^2+x_2^2+x_3^2 \le t^2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha_3^2}\right) d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 =$$

(ин ҷо аз формулаи Остроградский истифода бурда аз интеграли сатҳӣ ба интеграли секарата гузаштем)

$$= \frac{u_\varphi}{t} + \frac{1}{4\pi t} I(t),$$

ки ин ҷо

$$I(t) = \iiint\limits_{V_t(x_1,x_2,x_3)} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha_3^2}\right) d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3.$$

мебошад. Аз ин ҷо бармеояд, ки

$$\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t^2} = -\frac{u_\varphi}{t^2} + \frac{1}{t}\frac{\partial u_\varphi}{\partial t} - \frac{I(t)}{4\pi t^2} + \frac{1}{4\pi t}\frac{\partial I(t)}{\partial t} =$$
$$= -\frac{u_\varphi}{t^2} + \frac{1}{t}\left(\frac{u_\varphi}{t} + \frac{1}{4\pi t}I(t)\right) - \frac{I(t)}{4\pi t^2} + \frac{1}{4\pi t}\frac{\partial I(t)}{\partial t} = \frac{1}{4\pi t}\frac{\partial I(t)}{\partial t}.$$

Агар дар интеграли $I(t)$ ба тағъирёбандаҳои сферикии ρ, θ_1, θ_2 гузарем,

$$I(t) = \int\limits_0^t \int\limits_0^\pi \int\limits_0^{2\pi} \triangle\varphi(\rho, \theta_1, \theta_2)\rho^2 \sin\theta_2 d\theta_1 d\theta_2 d\rho$$

ҳосил мекунем. Аз ин ҷо

$$\frac{\partial I(t)}{\partial t} = t^2 \int\limits_0^\pi \int\limits_0^{2\pi} \triangle\varphi(t, \theta_1, \theta_2)\sin\theta_2 d\theta_1 d\theta_2 = \iint\limits_{S_t(x_1,x_2,x_3)} \triangle\varphi d\sigma_t,$$

$$\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t^2} = \frac{1}{4\pi t}\frac{\partial I(t)}{\partial t} = \frac{1}{4\pi t}\iint\limits_{S_t(x_1,x_2,x_3)} \triangle\varphi d\sigma_t = \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial x_3^2}.$$

Лемма исбот шуд.

Аз леммаи (9.1) бармеояд, ки функсияи тавассути формулаи (9.5) додашуда ҳалли муодилаи (9.1) буда, баробариҳои зерин ҷой доранд:

$$u(0, x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial u_\varphi}{\partial t}(0, x_1, x_2, x_3) + u_\psi(0, x_1, x_2, x_3) =$$
$$= \varphi(x_1, x_2, x_3) + 0 = \varphi(x_1, x_2, x_3),$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(0, x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t^2}(0, x_1, x_2, x_3) + \frac{\partial u_\psi}{\partial t}(0, x_1, x_2, x_3) =$$
$$= \triangle u_\varphi(0, x_1, x_2, x_3) + \psi(x_1, x_2, x_3) = \psi(x_1, x_2, x_3),$$

чунки $u_\varphi(0, x_1, x_2, x_3) \equiv 0$ аст. Яъне функсияи u ҳалли масъалаи (9.1) - (9.2) мебошад.

Агар ҳалли масъалаи (9.1) - (9.2) ягона бошад, аз формулаи (9.3) аён мегардад, ки ҳалли масъала аз функсияҳои φ, ψ бефосила вобаста аст. Бо ҳамин коррект̄ӣ будани масъала исбот мешавад.

Барои исботи ягонагии ҳалли масъалаи (9.1) - (9.2) нишон медиҳем, ки агар функсияи $u(t, x_1, x_2, x_3)$ ҳалли муодилаи (9.1) буда, шартҳои

$$u(0, x_1, x_2, x_3) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, x_1, x_2, x_3) = 0, \quad (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \tag{9.8}$$

-ро қаноат кунонад, он гоҳ он айниятан ба нул баробар аст.

Бигзор $(t_0, x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ дилхоҳ нуқта бошад. Бо K^0 конуси зеринро ишорат мекунем:

$$K^0 = \{(t, x_1, x_2, x_3) : 0 \le t \le t_0, (x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + (x_3 - x_3^0)^2 \le (t_0 - t)^2\}.$$

Қуллаи конус нуқтаи $(t_0, x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ буда, асосаш курраи $V_{t_0}(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ мебошад, ки дар гиперҳамвории $t = 0$-и фазои $\mathbb{R}^4$ мехобад. Ташкилдиҳандаҳои конус бо асос кунҷи 45^o-ро ташкил медиҳанд.

Хосияти муҳимми функсияи $u(t, x_1, x_2, x_3)$, ки онро бе исбот қабул мекунем, аз он иборат мебошад, ки ҳосилаи u аз рӯи самти ҳаргуна ташкилдиҳандаи конуси K^0 ба нул баробар аст. Азбаски тибқи шартҳои (9.8) қимати функсияи u дар зери конуси K^0 ба нул баробар аст ва ҳаргуна ташкилдиҳандаи конус қуллаи конусро бо асосаш пайваст мекунад, бинобарон қимати $u(t_0, x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ низ ба нул баробар аст. Ҳамин тариқ, функсияи u дар нуқтаи ихтиёрии $(t_0, x_1^0, x_2^0, x_3^0), t_0 > 0$ ба нул баробар аст.

Теорема исбот шуд.

Чун дар параграфи гузашта, формулаи (9.3)-ро истифода бурда, тавассути принсипи Дюамел ҳалли масъалаи Коширо барои муодилаи ғайриякҷинсаи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} + f(t, x_1, x_2, x_3)$$

ёфтан мумкин аст. Умуман, корректӣ будани масъалаи Коширо барои муодилаи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} + f(t, x_1, ..., x_n), \quad n \geq 1$$

нишон дода, формулаи ҳалли онро ёфтан мумкин аст.

Акнун формулаи (9.3) - ро истифода бурда, ҳалли масъалаи дученакаи Коширо меёбем:

$$(9.9) \qquad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, t > 0, & (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \\ u(0, x_1, x_2) = \varphi(x_1, x_2), & (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x_1, x_2) = \psi(x_1, x_2). \end{cases}$$

Ҳаргуна ҳалли масъалаи (9.9) ҳалли масъалаи (9.1) - (9.2) низ мебошад. Бинобарон онро аз рӯи формулаи (9.3) ёфтан мумкин аст:

$$u(t, x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\iint\limits_{S_t(x_1,x_2,x_3)} \varphi(\alpha_1, \alpha_2) d\sigma_t\right) + \frac{1}{4\pi t}\iint\limits_{S_t(x_1,x_2,x_3)} \phi(\alpha_1, \alpha_2) d\sigma_t.$$

Азбаски функсияҳои φ, ψ аз тағъирёбандаи α_3 вобаста нестанд, бинобарон интеграл аз рӯи сатҳи $S_t(x_1, x_2, x_3)$-ро бо интеграли дукарата аз рӯи доираи

$$B_t(x_1, x_2) = \{(\alpha_1, \alpha_2) : (\alpha_1 - x_1)^2 + (\alpha_2 - x_2)^2 \leq t^2\}$$

иваз намудан мумкин аст. Дар ин ҳолат

$$d\sigma_t = \frac{t}{\sqrt{t^2 - (\alpha_1 - x_1)^2 - (\alpha_2 - x_2)^2}} d\alpha_1 d\alpha_2$$

гузошта, ҳосил мекунем:

$$(9.10) \quad u(t, x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{B_t(x_1,x_2)} \frac{\psi(\alpha_1, \alpha_2) d\alpha_1 d\alpha_2}{\sqrt{t^2 - (\alpha_1 - x_1)^2 - (\alpha_2 - x_2)^2}} + \\ + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{B_t(x_1,x_2)} \frac{\psi(\alpha_1, \alpha_2) d\alpha_1 d\alpha_2}{\sqrt{t^2 - (\alpha_1 - x_1)^2 - (\alpha_2 - x_2)^2}}$$

- *формулаи Пуассон.* Формулаи Пуассон формулаи ҳалли масъалаи (9.9) мебошад.

Ингуна тарзи аз ҳалли масъалаи (9.1) - (9.2) ҳосил намудани ҳалли масъалаи (9.9)-ро *методи фурориш* (спуск) меноманд. Методи фуроришро истифода бурда, аз формулаи Пуассон формулаи Д' Аламберро ҳосил кардан мумкин аст.

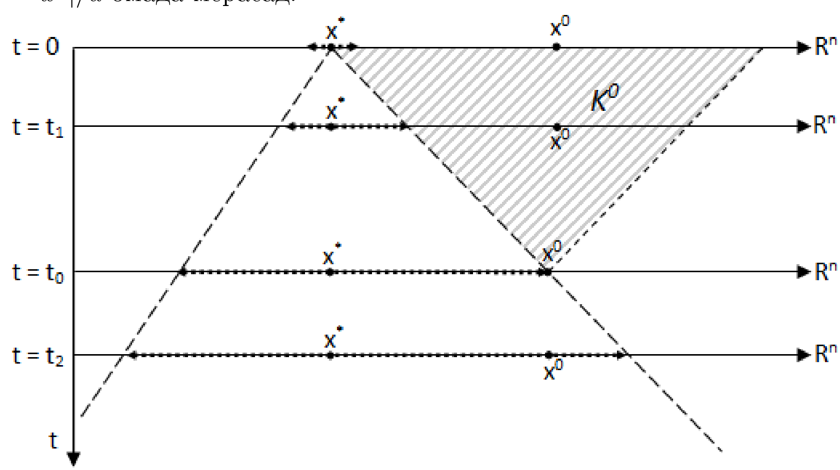
Корректӣ будани масъалаи (9.9) монанди теоремаи 9.1 ва бо истифода аз формулаи (9.10) исбот карда мешавад.

10. Хосиятҳои диффузия ва лакунаи муодилаҳои навъи гиперболӣ ва шарҳи физикии онҳо

Агар ба формулаҳои ҳалҳои масъалаҳои Коши барои муодилаҳои навъи гиперболӣ - формулаҳои Д'Аламбер, Пуассон, Кирхгоф бодиққат назар кунем, чунин хосияти ҳалҳо ба назари мушоҳида мерасад: қимати функсияи $u(t,x), t > 0, x \in \mathbb{R}^n$ дар нуқтаи (t_0, x^0) фақат аз қиматҳои $f(t,x)$ дар конуси

$$K^0 = \{(t,x) : 0 \le t \le t_0, |x - x^0|^2 \le a^2(t_0 - t)^2\}$$

ва қиматҳои $\varphi(x), \psi(x)$ дар асоси конус вобаста мебошад. Ин хосият аз нуқтаи назари физика чунин шарҳ дода мешавад, ки ҳаргуна ангезиши аз нуқтаи x^* дар лаҳзаи вақти $t = 0$ сар додашуда ба нуқтаи x_0 дар лаҳзаи вақти $t_0 = |x^* - x^0|/a$ омада мерасад.



Яъне протсесси тавассути муодилаи навъи гиперболӣ тавсифёбанда дар фазо бо суръати охирнок паҳн мешавад. Аввалин ангезиши ба нуқтаи x^0 омада мерасидагӣ *фронти пеши паҳншавии ангезиш* дар нуқтаи x^0 номида мешавад. Дар нуқтаи x^0 фронти пеши паҳншавии ангезиши аз нуқтаи x^* сар дода шуда дар лаҳзаи вақти $t_0 = |x^* - x^0|/a$ пайдо мешавад. Пас, протсессҳои бо муодилаҳои навъи гиперболӣ ифодаёбанда фронти пеши паҳншавӣ доранд.

Аз формулаҳои Д'Аламбер, Пуассон дида мешавад, ки қимати функсияи $u(t,x)$ дар нуқтаи (t_0, x^0) аз қиматҳои функсияҳои φ, ψ дар тамоми асоси конуси K^0 вобаста мебошад. Азбаски аз лаҳзаи вақти t_0 сар карда манбаи ангезиш x^* дар асоси конуси K^0 мехобад (нигаред ба расм), бинобарон аз ин лаҳзаи вақт сар карда таъсири ангезиши аз нуқтаи x^* сар дода шуда дар нуқтаи x^0 боқӣ мемонад. Яъне *фронти ақиби паҳншавии ангезиш* - охирин ангезиши нуқтаи x^0-ро тарк мекардагӣ мавҷуд нест. Ин хосиятро *хосияти диффузияи* муодилаҳои навъи гиперболӣ меноманд. Ҳамин тариқ, хосияти диффузияи муодилаҳои навъи гиперболӣ маънои онро дорад, ки қимати ҳалли муодила $u(t,x)$ дар нуқтаи (t_0, x^0) аз қиматҳои функсияҳои додашудаи $\varphi(x), \psi(x)$ дар ҳамаи нуқтаҳои асоси конуси K^0 вобаста мебошад. Шарҳи физикии ин хосият аз он иборат мебошад, ки протсесси тавассути ин муодила ифодаёбанда фронти пеши паҳншавӣ дошта, фронти ақиби паҳншавӣ надорад.

Маълум мешавад, ки муодилаи диференсиалии

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial u}{\partial x_n^2} \right) + f(t, x_1, ..., x_n) \tag{10.1}$$

ҳангоми $n = 1$ ё $n \geq 2, n$ - ҷуфт будан хосияти диффузияро дорад.

Аз формулаи Кирхгоф дида мешавад, ки ҳангоми $n = 3$ қимати ҳалли муодилаи (10.1) дар нуқтаи (t_0, x^0) аз қиматҳои функсияҳои φ, ψ танҳо дар сарҳади асоси конуси K^0 вобаста мебошад. Ин хосиятро *хосияти лакуна* (холигӣ) меноманд. Маълум мешавад, ки ҳангоми $n \geq 3, n$ - тоқ будан муодилаи (10.1) хосияти лакунаро дорад.

Хосияти лакуна чунин шарҳи физикӣ дорад, ки протсесси тавассути муодилаи додашуда тавсифёбанда фронти пеши паҳншавӣ ва фронти ақиби паҳншавӣ дорад: ангезиши аз ягон манбаъ сар дода шуда дар ҳар як нуқтаи фазо баъди фурсате пайдо шуда, сипас, баъди фурсати дигар нест мешавад. Ин хосият дар физика ба номи *принсипи Гюйгенс* маъмул аст. Маҳз ба шарофати ҷой доштани ин принсип ҳаргуна мавҷе ба монанди садо, агар аз ягон манбаъ сар дода шавад, баъди муддате ба мо омада мерасад ва, сипас, моро тарк мекунад. Агар баъди муддате моро тарк намекард, таъсири ҳамаи садоҳои ба мо омада расанда муддати вақти тулонӣ боқӣ монда, дар натиҷа ба ҳам омехта мешуданд ва мо як садоро аз садои дигар фарқ карда наметавонистем. Агар муҳите, ки дар он зиндагонӣ мекунем, фазои андозааш ҷуфт мебуд, тибқи мулоҳизоти болоӣ ҳамин ҳодиса рӯй медод, ки тасаввур кардани он ғайриимкон аст.

Ҳамин тариқ, ин ҷо намунаи барҷастаи тавассути муодилаҳои дифференсиалӣ омӯхтани ҳодисаҳои ҷолиби физикиро мавриди назар қарор додем.

Ҳодисаҳои лакуна ва диффузия барои муодилаҳо ва системаҳои муодилаҳои хаттию ғайрихаттии навъи гиперболӣ аз тарафи олимон Петровский И.Г., Атя, Ботт, Гординг, Вайнберг ва дигарон ба таври мукаммал омӯхта шудаанд. Тадқиқотҳои онҳо бо мазмуну мундариҷаи худ илми математикаро боз ҳам ғанӣ гардонидаанд.

11. Масъалаи омехта барои лаппиши озоди тори ниммаҳдуд

Барои муодилаи лаппиши озоди тори ниммаҳдуд

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad x > 0 \tag{11.1}$$

масъалаи ёфтани ҳалли шартҳои аввалаи

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = \psi(x), \quad x \geq 0 \tag{11.2}$$

ва шарти канории

$$u(t, 0) = \mu(t), \quad t \geq 0 \tag{11.3}$$

-ро қонеъкунандаро дида мебароем.

Чуноне ки дар параграфи 8 қайд гардид, ҳалли умумии муодилаи (11.1) чунин намуд дорад:

$$u(t, x) = \Phi_1(x - at) + \Phi_2(x + at). \tag{11.4}$$

Функсияҳои Φ_1, Φ_2-ро тавре интихоб мекунем, ки функсияи $u(t, x)$ шартҳои аввалаю канориро қаноат кунонад. Бо ин мақсад формулаи (11.4)-ро дар шартҳои (11.2), (11.3) мегузорем:

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad \Phi_1(x) + \Phi_2(x) = \varphi(x), \quad x \geq 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0,x)=\psi(x), \quad -a\Phi_1'(x)+a\Phi_2'(x)=\psi(x), \quad x\geq 0$$
$$u(t,0)=\mu(t), \quad \Phi_1(-at)+\Phi_2(at)=\mu(t) \quad t\geq 0.$$

Пас

$$\Phi_1(x)=\frac{\varphi(x)}{2}-\frac{1}{2a}\int\limits_0^x\psi(s)ds-\frac{C}{2}, \quad x\geq 0,$$

$$\Phi_2(x)=\frac{\varphi(x)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_0^x\psi(s)ds+\frac{C}{2}, \quad x\geq 0$$

буда, ҳангоми $x-at\geq 0$

$$u(t,x)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(s)ds$$

мебошад.

Аз баробарии

$$\Phi_1(-at)+\Phi_2(at)=\mu(t), \quad t\geq 0$$

бармеояд, ки ҳангоми $s<0$ будан,

$$\Phi_1(s)=\mu(-\frac{s}{a})-\Phi_2(-s).$$

Бинобарон агар $x-at<0$ бошад, он гоҳ

$$\Phi_1(x-at)=\Phi_1(s)\big|_{s=x-at}=\mu(t-\frac{x}{a})-\Phi_2(at-x)=$$

$$=\mu(t-\frac{x}{a})-\frac{\varphi(at-x)}{2}-\frac{1}{2a}\int\limits_0^{at-x}\psi(s)ds-\frac{C}{2}$$

шуда, барои функсияи $u(t,x)$ формулаи зеринро ҳосил мекунем:

$$u(t,x)=\mu(t-\frac{x}{a})+\frac{\varphi(x+at)-\varphi(at-x)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{at-x}^{x+at}\psi(s)ds.$$

Ҳамин тариқ, ҳалли масъалаи (11.1) - (11.3) мавҷуд буда, тавассути формулаи зерин ёфта мешавад:

(11.5)

$$u(t,x)=\theta(at-x)\mu(t-\frac{x}{a})+\frac{\varphi(x+at)-\operatorname{sign}(x-at)\varphi(|x-at|)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{|x-at|}^{x+at}\psi(s)ds,$$

ки ин ҷо

$$\theta(s)=\begin{cases}1, & s>0\\ 0, & s\leq 0\end{cases}$$

функсияи Хевисайд мебошад. Аз формулаи (11.5) ҳамчун натиҷа теоремаи зерин мебарояд.

Теоремаи 11.1. *Бигзор $\varphi,\psi,\mu\in C^2(0;+\infty)\cap C[0;+\infty)$ буда, шартҳои зерин иҷро шаванд:*

$$\varphi(0)=\mu(0), \quad \lim_{t\to 0}\mu'(t)=\psi(0).$$

Он гоҳ ягона ҳалли масъалаи (11.1) - (11.3) *мавҷуд буда, аз функсияҳои* φ, ψ *бефосила вобаста аст.*

Тарзи ёфтани ҳалли масъалаи (11.1) - (11.3), ки дар боло баён намудем, бо номи *методи акскунӣ* (метод отражения) маъмул буда, шарҳи муайянӣ физикӣ дорад.

Принсипи Дюамел ва формулаи (11.4)-ро истифода бурда, ҳалли шартҳои (11.1), (11.3)-ро қонеъ мекунондагии муодилаи лаппиши ғайриозоди тори ниммаҳдудро ёфтан мумкин аст.

12. Ҳалли масъалаи омехтаи якӯм. Методи Фуре

Барои ёфтани ҳалҳои масъалаҳои омехта, ки барои муодилаҳои навъи гиперболӣ гузошта мешаванд, *методи Фуреро* истифода мебаранд. Бо моҳияти ин метод дар мисоли ҳалли масъалаи омехтаи якӯм барои муодилаи лаппиши озоди тори маҳдуд шинос мешавем.

Бигзор масъалаи омехтаи якӯм

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t>0, \quad 0<x<l, \quad (a>0, l>0) \tag{12.1}$$

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = \psi(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{12.2}$$

$$u(t,0) = u(t,l) = 0, \quad t \ge 0 \tag{12.3}$$

дода шуда бошад. Функсияи ғайринулии $v(t,x)$ *функсияи мавҷӣ* номида мешавад, агар он намуди

$$v(t,x) = T(t)X(x) \tag{12.4}$$

дошта, муодилаи (12.1) ва шартҳои канории (12.3)-ро қаноат кунонад. Аз рӯи методи Фуре барои ёфтани ҳалли масъалаи (12.1) - (12.3) аввал ҳамаи функсияҳои мавҷӣ ёфта шуда, сипас, ҳалли масъала дар намуди суммаи функсияҳои мавҷӣ ҷустуҷӯ карда мешавад. Бо ҳамин сабаб методи Фуреро *методи ҷудокунии тағйирёбандаҳо* низ меноманд.

Функсияҳои мавҷиро меёбем. Барои ин функсияи намуди (12.4) доштаро дар муодила ва шартҳои канорӣ мегузорем:

$$\begin{cases} T''(t)X(x) = a^2 T(t)X''(x), \quad 0 \le x \le l, \quad t>0 \\ T(t)X(0) = T(t)X(l) = 0, \quad t \ge 0, \end{cases}$$

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}, \quad X(0) = X(l) = 0.$$

Дар баробарии

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

тарафи чап аз тағйирёбандаи t ва тарафи рост аз тағйирёбандаи x вобаста мебошанд. Аз ин рӯ, баробарии мазкур танҳо дар ҳолати ба ягон адади λ баробар будани тарафҳои чапу рост ҷой дорад:

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \lambda, \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda.$$

Пас чунин функсияҳои айниятан ба нул баробар набудаи $X(x), (0 \leq x \leq l), T(t), (t \geq 0)$-ро ёфтан лозим аст, ки барои ягон адади λ шартҳои зеринро қаноат кунонанд:

$$\left\{ \begin{array}{l} X''(x) - \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < l, \\ X(0) = X(l) = 0, \end{array} \right. \tag{12.5}$$

$$T''(t) - \lambda a^2 T(t) = 0, \quad t > 0. \tag{12.6}$$

Масъалаи (12.5)-ро *масъалаи Штурм - Лиувилл* меноманд. Он аз ёфтани чунин ададҳои λ иборат мебошад, ки барои онҳо масъалаи (12.5) ҳалҳои ғайринулӣ дорад. Ин гуна адади λ ва ҳалли ғайринулии ба он мувофиқро мувофиқан *қимати хос ва вектори хоси* масъалаи (12.5) меноманд. Барои ҳалли масъалаи (12.5) аввал ҳалли умумии муодилаи дифференсиалии оддии

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0$$

-ро ёфта, сипас, аз он ҳалли ғайринулии шартҳои канориро қонеъ мекунондагиро ҷудо кардан лозим аст. Агар ҳамин тавр кунем, он гоҳ ба чунин натиҷа меоем, ки танҳо барои қиматҳои

$$\lambda_n = -\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \quad n = 1, 2, ...$$

масъалаи (12.5) ҳалҳои ғайринулӣ дорад, ки онҳо аз функсияҳои

$$X_n(x) = \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad n = 1, 2, ...$$

иборат мебошанд. Дар муодилаи (12.5) ба ҷои λ қиматҳои $-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \quad n = 1, 2, ...$-ро гузошта, ҳалли умумии онро меёбем:

$$T''(t) + \left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 T(t) = 0,$$

$$T_n(t) = A_n \sin \frac{\pi n a}{l} t + B_n \cos \frac{\pi n a}{l} t, \quad n = 1, 2, ...$$

Ҳамин тариқ, функсияҳои мавҷӣ аз функсияҳои зерин иборат мебошанд:

$$v_n(t, x) = \left(A_n \sin \frac{\pi n a}{l} t + B_n \cos \frac{\pi n a}{l} t\right) \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad n = 1, 2, ...$$

Акнун мувофиқи методи Фуре ҳалли масъалаи омехтаи (12.1) - (12.3)-ро дар намуди зайл ҷустуҷӯ мекунем:

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \sin \frac{\pi n a}{l} t + B_n \cos \frac{\pi n a}{l} t\right) \sin \frac{\pi n}{l} x. \tag{12.7}$$

Ҳар як аъзои қатори тригонометрии мазкур ҳалли муодилаи (12.1) буда, шартҳои канории (12.3)-ро қаноат мекунонад. Аз ин рӯ, зоҳиран (ба тариқи формалӣ, яъне бе назардошти он ки қатор наздикшаванда аст ё не) барои функсияи $u(t, x)$ низ баробариҳои (12.1), (12.3) иҷро мешаванд. Доимиҳои ихтиёрии $A_n, B_n, n = 1, 2, ...$-ро тавре интихоб мекунем, ки барои функсияи $u(t, x)$ шартҳои аввалаи (12.2) иҷро шаванд. Барои ин формулаи (12.7)-ро дар шартҳои аввалаи (12.2) мегузорем:

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin \frac{\pi k}{l} x = \varphi(x),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = \psi(x), \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi k a}{l} A_k \sin \frac{\pi k}{l} x = \psi(x).$$

Ҳар ду тарафҳои ин баробариҳоро ба $\sin \frac{\pi n}{l} x$ зарб карда, аз рӯи фосилаи $[0;l]$ интеграл мегирем:

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k \int_0^l \sin \frac{\pi k}{l} x \cdot \sin \frac{\pi n}{l} x dx = \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi k a}{l} A_k \int_0^l \sin \frac{\pi k}{l} x \cdot \sin \frac{\pi n}{l} x dx = \int_0^l \psi(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx.$$

Азбаски

$$\int_0^l \sin \frac{\pi k}{l} x \cdot \sin \frac{\pi n}{l} x dx = \begin{cases} 0, & k \neq n \\ \frac{l}{2}, & k = n \end{cases}$$

аст, бинобарон баробариҳо чунин намуд мегиранд:

$$\frac{l}{2} B_n = \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx,$$

$$\frac{\pi n a}{2} A_n = \int_0^l \psi(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx.$$

Дар натиҷа барои доимиҳои $A_n, B_n, n = 1, 2, ...$ формулаҳои зеринро ҳосил мекунем:

$$\begin{cases} A_n = \frac{2}{\pi n a} \int\limits_0^l \psi(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx, \\ B_n = \frac{2}{l} \int\limits_0^l \varphi(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx, \quad n = 1, 2, ... \end{cases} \tag{12.8}$$

Ҳамин тариқ, методи Фурьеро истифода бурда, ҳалли масъалаи (12.1) - (12.3)-ро дар намуди қатори (12.7) ёфтем. Формулаи (12.7) ба маънои томаш ҳамон вақт ҳалли масъала мешавад, ки агар суммаи қатор ду маротиба дифференсиронидашаванда буда, барои он баробариҳои (12.1) - (12.3) ҷой дошта бошанд. Бинобарон формулаи (12.7) формулаи ҳалли зоҳирии (формалии) масъалаи омехтаи (12.1) - (12.3) мебошад.

Масъала дар бораи он ки дар кадом ҳолат суммаи қатори (12.7) ҳалли масъалаи омехта мешавад *масъалаи асосноккунии методи Фурье* номида мешавад. Дар назарияи муодилаҳои физикаи математикӣ ин масъала алоҳида мавриди тадқиқу омӯзиш қарор мегирад.

Яке аз вариантҳои ҳалли масъалаи мазкурро меорем.

Теоремаи 12.1. *Бигзор функсияҳои $\varphi(x), \psi(x)$ шартҳои зеринро қаноат кунонанд:*

1) функсияи $\varphi(x)$ дар порчаи $[0;l]$ ҳосилаи бефосилаи тартиби сеюмро дошта, баробариҳои

$$\varphi(0) = \varphi(l) = 0, \quad \varphi''(0) = \varphi''(l) = 0$$

иҷро мешаванд;

2) функсияи $\psi(x)$ дар порчаи $[0; l]$ ҳосилаи бефосилаи тартиби дуюмро доштa, баробариҳои

$$\psi(0) = \psi(l) = 0$$

иҷро мешаванд.

Он гоҳ функсияи $u(t, x)$-и тавассути формулаи (12.7) додашуда ҳалли масъалаи омехтаи (12.1) - (12.3) шуда,

3) қатори (12.7)-ро аъзо ба аъзо ду маротиба дифференсиронидан мумкин аст;

4) қатори (12.7) ва ҳосилаҳои то тартиби дуюмаш дар сарбасти соҳаи $(0; t_0)\times(0; l)$ (ин ҷо t_0 ягон адади мусбат аст) мутлақ ва мунтазам наздикшаванда мебошанд.

Исботи теоремаи 12.1 дар китоби [6] оварда шудааст.

13. Ягонагӣ ва бефосила вобастагии ҳалли масъалаи омехтаи якӯм

Масъалаи омехтаи якӯмро дида мебароем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t, x), \quad t > 0, \quad 0 < x < l, \tag{13.1}$$

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = \psi(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{13.2}$$

$$u(t, 0) = u(t, l) = 0, \quad t \ge 0. \tag{13.3}$$

Нишон медиҳем, ки ҳалли масъала ягона буда, аз функсияҳои f, φ, ψ бефосила вобаста аст.

Бигзор $u_1(t, x)$ ҳалли ба функсияҳои $f = f_1, \varphi = \varphi_1, \psi = \psi_1$ мувофиқ ва $u_2(t, x)$ ҳалли ба функсияҳои $f = f_2, \varphi = \varphi_2, \psi = \psi_2$ мувофиқи масъалаи (13.1) - (13.3) бошанд. Агар чунин ишораҳо кунем:

$$v = u_1 - u_2, f_0 = f_1 - f_2, \varphi_0 = \varphi_1 - \varphi_2, \psi_0 = \psi_1 - \psi_2,$$

он гоҳ функсияи $v(t, x)$ ҳалли масъалаи зерин мешавад:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f_0(t, x), \quad t > 0, \quad 0 < x < l, \tag{13.4}$$

$$v(0, x) = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial v}{\partial t}(0, x) = \psi_0(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{13.5}$$

$$v(t, 0) = v(t, l) = 0, \quad t \ge 0. \tag{13.6}$$

Ҳар ду тарафи муодилаи (13.4)-ро ба $\frac{\partial v}{\partial t}$ зарб карда, аз рӯи тағйирёбандаи x интеграл мегирем:

$$\int_0^l \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{\partial v}{\partial t} dx = a^2 \int_0^l \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial v}{\partial t} dx + \int_0^l f_0 \frac{\partial v}{\partial t} dx.$$

Лекин

$$\int_0^l \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \frac{\partial v}{\partial t} dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^l \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 dx,$$

$$\int\limits_0^l \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\frac{\partial v}{\partial t}dx = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial t}\Big|_0^l - \int\limits_0^l \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)dx = -\int\limits_0^l \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_0^l \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 dx$$

аст. Бинобарон

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_0^l \left[\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right]dx = \int\limits_0^l f_0\frac{\partial v}{\partial t}dx$$

мешавад. Ҳар ду тарафи баробарии охиринро аз рӯи тағйирёбандаи t интегронида ҳосил мекунем:

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^t \frac{d}{ds}\left(\int\limits_0^l \left[\left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right]dx\right)ds = \int\limits_0^t\int\limits_0^l f_0\frac{\partial v}{\partial s}dxds,$$

$$\int\limits_0^l \left[\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right]dx = \int\limits_0^t (\psi_0^2 + (\varphi_0')^2)dx + 2\int\limits_0^t\int\limits_0^l f_0\frac{\partial v}{\partial s}dxds.$$

Агар

$$\alpha(t) = \int\limits_0^l \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 dx, \quad c_0 = \int\limits_0^l (\psi_0^2 + (\varphi_0')^2)dx$$

ишорат кунем, он гоҳ бо назардошти нобаробариҳои

$$\int\limits_0^t\int\limits_0^l f_0\frac{\partial v}{\partial s}dxds \le \int\limits_0^t \left(\int\limits_0^l f_0^2dx\right)^{1/2}\left(\int\limits_0^l \left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)^2dx\right)^{1/2}ds = \int\limits_0^t \beta(s)\sqrt{\alpha(s)}ds,$$

ки ин ҷо

$$\beta(t) = \left(\int\limits_0^l f_0^2(t,x)dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

мебошад, нобаробариҳои зерин ҷой доранд:

$$\alpha(t) \le c_0 + 2\int\limits_0^t \beta(s)\sqrt{\alpha(s)}ds,$$

$$\alpha(t) \le c_0 + \int\limits_0^t \beta^2(s)ds + \int\limits_0^t \alpha(s)ds,$$

$$\alpha(t) \le c_0 + \int\limits_0^T \beta^2(s)ds + \int\limits_0^t \alpha(s)ds, \quad 0 \le t \le T.$$

Аз ин ҷо мувофиқи леммаи Гронуолла (ин лемма аз курси муодилаҳои дифференсиалии оддӣ маълум мебошад) нобаробарии

$$\alpha(t) \le (c_0 + \int\limits_0^T \beta^2(s)ds)e^t, \quad 0 \le t \le T$$

ҳосил мешавад. Пас

$$\int\limits_0^l \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 dx \le \left(\int\limits_0^l ((\varphi_0')^2+\psi_0^2)dx + \int\limits_0^T \int\limits_0^l f_0^2 dxds\right) e^t, \quad 0 \le t \le T,$$

$$\int\limits_0^l \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 dx \le \int\limits_0^l ((\varphi_0')^2+\psi_0^2)dx + \int\limits_0^t \int\limits_0^l f_0^2 dxds + \int\limits_0^t \int\limits_0^l \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 dxds$$

мебошад. Аз формулаи Нютон - Лейбнитс ва нобаробарии Коши-Бунаяковский истифода бурда, ҳосил мекунем:

$$|v(t,x)| = |v(0,x) + \int\limits_0^x \frac{\partial v}{\partial \xi}(t,\xi)d\xi| \le |v(0,x)| + \int\limits_0^x \left|\frac{\partial v}{\partial \xi}(t,\xi)\right| d\xi \le$$

$$\le |\varphi_0(x)| + \int\limits_0^l \left|\frac{\partial v}{\partial \xi}(t,\xi)\right| d\xi \le |\varphi_0(x)| + \sqrt{l}\left(\int\limits_0^l \left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|^2 dx\right)^{1/2}.$$

Аз нобаробариҳои болоӣ бармеояд, ки агар

$$\max_{0\le x\le l} |\varphi_0(x)| \to 0, \quad \int\limits_0^l (\varphi_0')^2 dx \to 0, \quad \int\limits_0^l \psi_0^2 dx \to 0, \quad \int\limits_0^T \int\limits_0^l f_0^2 dxds \to 0$$

бошанд, он гоҳ

$$\max_{0\le t\le T} \int\limits_0^l \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 dx \to 0,$$

$$\max_{0\le t\le T} \int\limits_0^l \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 dx \to 0,$$

$$\max_{\substack{0\le t\le T\\0\le x\le l}} |v(t,x)| \to 0$$

мешаванд. Ин чунин маъно дорад, ки ҳангоми f_1 ба f_2, φ_1 ба φ_2, ψ_1 ба ψ_2 наздик шудан, функсияи $u_1(t,x)$ ба функсияи $u_2(t,x)$ наздик мешавад. Аз нобаробариҳои ҳосилшуда инчунин бармеояд, ки ҳангоми $f_1 = f_2, \varphi_1 = \varphi_2, \psi_1 = \psi_2$ будан, $u_1 = u_2$ мешавад. Яъне ҳалли масъалаи (13.1) - (13.3) ягона аст.

Ҳамин тариқ, аз натиҷаҳои ду параграфҳои охирон аён мегардад, ки масъалаи омехтаи (13.1) - (13.3) корректӣ аст. Ба ҳамин монанд нишон додан мумкин аст, ки масъалаҳои омехтаи якӯм, дуюм ва сеюми дар параграфи 7 баён гардида ҳангоми иҷрошавии баъзе шартҳо корректӣ мешаванд.