Боби III. Муодилаҳои навъи параболӣ

Дар ин боб корректнокии масъалаҳои Кошию омехта барои муодилаи навъи параболии

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (a > 0)$$

омӯхта мешавад.

14. Гузориши масъалаҳо барои муодилаи гармипаҳншавӣ дар меҳвар

Масъалаи Коши. Функсияи $u \in C^{1,2}((0;T) \times \mathbb{R}) \cap C([0;T] \times \mathbb{R})$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < t < T, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (a > 0) \tag{14.1}$$

ва шарти аввалаи

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R} \tag{14.2}$$

-ро қаноат кунонад.

Масъалаи омехтаи I. Функсияи $u \in C^{1,2}(Q) \cap C(\overline{Q})$ ёфта шавад, ки ҳалли муодилаи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (t, x) \in Q, \quad Q = (0;T) \times (0;l) \tag{14.3}$$

шуда, шарти аввалаи

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le l \tag{14.4}$$

ва шартҳои канории Дирихле

$$u(t, 0) = \mu_1(t), \quad u(t, l) = \mu_2(t), \quad 0 \le t \le T \tag{14.5}$$

-ро қаноат кунонад.

Масъалаи омехтаи II. Функсияи $u \in C^{1,2}(Q) \cap C^{0,1}(\overline{Q})$ ёфта шавад, ки ҳалли муодилаи (14.3) шуда, шарти аввалаи (14.4) ва шартҳои канории Нейман

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = \mu_1(t), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(t, l) = \mu_2(t), \quad 0 \le t \le T \tag{14.6}$$

-ро қаноат кунонад.

Масъалаи омехтаи III. Функсияи $u \in C^{1,2}(Q) \cap C^{0,1}(\overline{Q})$ ёфта шавад, ки ҳалли муодилаи (14.3) шуда, шарти аввалаи (14.4) ва шартҳои канории Робен

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) + \sigma_1(t) u(t, 0) = \mu_1(t), \quad 0 \le t \le T \\ \frac{\partial u}{\partial x}(t, l) + \sigma_2(t) u(t, l) = \mu_2(t), \end{array} \right. \tag{14.7}$$

-ро қаноат кунонад.

Дар гузориши масъалаҳои овардашуда $C^{m,n}(Q)$ синфи функсияҳои дар Q нисбат ба t ҳосилаҳои бефосилаи то тартиби m ва нисбат ба x ҳосилаҳои бефосилаи то тартиби n доштаро ифода мекунад.

Ба ҳамин монанд масъалаҳои Кошию омехтаро барои ҳаргуна муодилаи дифференсиалии тартиби дуюми навъи параболӣ гузоштан мумкин аст.

15. Принсипи максимуму минимум барои муодилаи гармипаҳншавӣ

Принсипи максимуму минимум хосияти хоси ҳалҳои муодилаҳои навъи параболиро ифода намуда, ҳангоми исботи ягонагӣ ва аз функсияи аввала бефосила вобастагии ҳалҳои масъалаҳои Кошию омехта истифода бурда мешавад. Принсипи мазкурро дар мисоли муодилаи гармипаҳншавӣ дар меҳвар

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{15.1}$$

дида мебароем.

Теоремаи 15.1 *(принсипи максимуму минимум дар соҳаи маҳдуд). Агар дар соҳаи* $Q = (0;T)\times(0;l)$ *функсияи* $u \in C^{1,2}(Q)\cap C(\overline{Q})$ *ҳалли муодилаи* (15.1) *бошад, он гоҳ баробариҳои зерин ҷой доранд:*

$$\max_{\overline{Q}} u(t,x) = \max_{G\cup\Gamma} u(t,x), \tag{15.2}$$

$$\min_{\overline{Q}} u(t,x) = \min_{G\cup\Gamma} u(t,x), \tag{15.3}$$

ки ин ҷо

$G = \{0\}\times[0;l]$ - *асоси поёнии росткунҷаи* Q,

$\Gamma = [0;T]\times[0;l]$ - *тарафҳои паҳлӯии росткунҷаи* Q

мебошанд.

Принсипи мазкур тасдиқ мекунад, ки ҳалли муодилаи (15.1) қиматҳои калонтарин ва хурдтаринашро дар нуқтаҳои асоси поёнӣ ё тарафҳои паҳлӯии росткунҷаи Q қабул мекунад. Пас нуқтаҳои экстремуми функсияи u-и ҳалли муодилаи (15.1)-ро ёфтанӣ бошем, онҳоро дар маҷмӯи $G\cup\Gamma$ ҷустуҷӯ кардан кифоя аст.

Исботи теорема. Бигзор

$$M = \max_{\overline{Q}} u(t,x), \quad m = \max_{G\cup\Gamma} u(t,x)$$

бошад. Фарз мекунем, ки баробарии (15.2) ҷой надорад, яъне $m < M$ аст. Он гоҳ чунин нуқтаи $(t_0,x_0) \in \overline{Q}\setminus(G\cup\Gamma)$ мавҷуд аст, ки $u(t_0,x_0) = M$ мешавад. Функсияи зеринро дида мебароем:

$$v(t,x) = u(t,x) + \frac{M-m}{4l^2}(x-x_0)^2.$$

Барои ин функсияи

$$v(t_0,x_0) = u(t_0,x_0) + \frac{M-m}{4l^2}\cdot 0 = M$$

ва ҳангоми $(t,x)\in G\cup\Gamma$ будан,

$$v(t,x) \le u(t,x) + \frac{M-m}{4} \le m + \frac{M-m}{4} = M\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cdot\frac{m}{M}\right) = M\theta$$

аст, ки ин ҷо

$$\theta = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cdot\frac{m}{M}, \quad 0 < \theta < 1$$

мебошад. Пас функсияи $v(t,x)$ чун функсияи $u(t,x)$ қимати калонтаринашро дар $G\cup\Gamma$ қабул намекунад. Бигзор

$$v(t_1,x_1) = \max_{\overline{Q}} v(t,x)$$

бошад. Азбаски (t_1, x_1) нуқтаи максимум аст, бинобарон нобаробариҳои

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t_1, x_1) \le 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t}(t_1, x_1) \ge 0$$

дурустанд. Аз ин рӯ,

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t_1, x_1) - a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t_1, x_1) \ge 0$$

мешавад. Аз тарафи дигар

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t_1, x_1) - a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t_1, x_1) = \frac{\partial v}{\partial t}(t_1, x_1) - a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t_1, x_1) - a^2 \frac{M - m}{2l^2} = \\ = -a^2 \frac{M - m}{2l^2} < 0$$

мебошад. Зиддияти ҳосилшуда нишон медиҳад, ки нобаробарии $M > m$ ғайриимкон аст. Пас баробарии (15.2) дуруст аст. Айнан ҳамин тавр дурустии баробарии (15.3)-ро нишон додан мумкин аст.

Теорема исбот шуд.

Теоремаи 15.2 *(принсипи максимуму минимум дар соҳаи номаҳдуд). Агар функсияи* $u \in C^{1,2}(\Pi) \cap C(\overline{\Pi})$ *дар соҳаи* $\Pi = (0; T) \times \mathbb{R}$ *ҳалли муодилаи* (15.1) *ва дар* $\overline{\Pi}$ *маҳдуд бошад, он гоҳ нобаробариҳои зерин дурустанд:*

$$m_1 \le u(t, x) \le M_1, \quad (t, x) \in \Pi, \tag{15.4}$$

ки ин ҷо

$$m_1 = \inf_{x \in \mathbb{R}} u(0, x), \quad M_1 = \sup_{x \in \mathbb{R}} u(0, x)$$

мебошанд.

Исбот. Нишон медиҳем, ки барои ҳаргуна $(t_0, x_0) \in \Pi$ ва $\varepsilon > 0$ нобаробарии $u(t_0, x_0) \le M_1 + \varepsilon$ ҷой дорад. Он гоҳ аз ин ҷо бармеояд, ки

$$u(t, x) \le M_1 \quad \forall (t, x) \in \Pi$$

аст.

Функсияҳои зеринро дида мебароем:

$$w(t, x) = 2t + x^2,$$

$$v(t, x) = \frac{\varepsilon w(t, x)}{w(t_0, x_0)} + M_1 - u(t, x),$$

ки дар соҳаи Π ҳалли муодилаи (15.1) мебошанд. Ҳангоми $t = 0, x \in \mathbb{R}$

$$v(0, x) = \frac{\varepsilon x^2}{2t_0 + x_0^2} + M_1 - u(0, x) \ge 0$$

ва ҳангоми

$$0 \le t \le T, \quad N = \sup_{\Pi} |u(t, x)|,$$

$$|x| = |x_0| + \sqrt{\frac{(N - M_1) w(t_0, x_0)}{\varepsilon}}$$

$$v(t, x) \ge \frac{\varepsilon}{w(t_0, x_0)} \left(2t + \frac{(N - M_1) w(t_0, x_0)}{\varepsilon}\right) + M_1 - u(t, x) \ge \\ \ge N - M_1 + M_1 - u(t, x) \ge 0$$

аст. Яъне функсияи $v(t,x)$ дар асоси поёнӣ ва тарафҳои паҳлӯии росткунҷаи

$$Q = \left\{(t,x) : 0 < t < T, |x| < |x_0| + \sqrt{\frac{(N-M_1)w(t_0,x_0)}{\varepsilon}}\right\}$$

ғайриманфӣ мебошад. Аз ин рӯ, дар асоси теоремаи 15.1 функсияи $v(t,x)$ дар ҳамаи нуқтаҳои росткунҷаи $\overline{Q}$ ғайриманфӣ аст. Азбаски $(t_0,x_0) \in \overline{Q}$ аст, бинобарон $v(t_0,x_0) \geq 0$ мешавад. Аз ин ҷо ҳосил мекунем:

$$\frac{\varepsilon w(t_0,x_0)}{w(t_0,x_0)} + M_1 - u(t_0,x_0) = v(t_0,x_0) \geq 0,$$

$$\varepsilon + M_1 \geq u(t_0,x_0).$$

Пас нобаробарии

$$u(t_0,x_0) \leq M_1 + \varepsilon$$

барои нуқтаҳои ихтиёрии $(t_0,x_0) \in \Pi$ ва адади ихтиёрии мусбати ε ҷой дошта, дурустии нобаробарии

$$\sup_{\Pi} u(t,x) \leq M_1$$

-ро собит мекунад.

Шабеҳи мулоҳизоти болоӣ нишон додан мумкин аст, ки барои функсияи

$$u_1(t,x) = -u(t,x)$$

нобаробарии

$$\sup_{\Pi} u_1(t,x) \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} u_1(0,x)$$

ҷой дорад. Аз ин ҷо ҳосил мекунем:

$$\sup_{\Pi}(-u(t,x)) \leq \sup_{x\in\mathbb{R}}(-u(0,x)),$$

$$-\inf_{\Pi} u(t,x) \leq -\inf_{x\in\mathbb{R}} u(0,x),$$

$$\inf_{\Pi} u(t,x) \geq \inf_{x\in\mathbb{R}} u(0,x).$$

Теорема исбот шуд.

16. Масъалаи Коши барои муодилаи гармипаҳншавӣ дар меҳвар

Барои муодилаи гармипаҳншавӣ дар меҳвари номаҳдуд масъалаи Коши гузошта мешавад, ки он аз ёфтани функсияи $u \in C^{1,2}(\Pi)\cap C(\overline{\Pi})$ иборат мебошад, ки муодилаи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (t,x) \in \Pi, \quad \Pi = (0;T)\times\mathbb{R} \tag{16.1}$$

ва шарти аввалаи

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R} \tag{16.2}$$

-ро қаноат мекунонад.

Теоремаи 16.1 *Бигзор функсияи $\varphi \in C(\mathbb{R})$ маҳдуд бошад. Он гоҳ ҳалли маҳдуди масъалаи* (16.1) - (16.2) *мавҷуд аст, ки тавассути интеграли Пуассон*

$$u(t,x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(s)e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2t}}ds, \quad t>0, \quad x\in\mathbb{R} \tag{16.3}$$

ёфта мешавад.

Функсияи

$$G(s,t,x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}}$$

-ро, ки дар формулаи (16.3) иштирок мекунад, *ҳалли фундаменталии* муодилаи гармипаҳншавӣ меноманд.

Пеш аз исботи теорема маълумоти мухтасар дар бораи табдилдиҳии Фуре меорем. Барои ҳар гуна функсияи $\psi(x)$, ки барои он интеграли ғайрихоси

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) e^{-i\xi x} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}$$

наздикшаванда аст, функсияи

$$\mathscr{F}[\psi] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) e^{-i\xi x} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}$$

образи Фуреи функсияи ψ номида мешавад. Протсесси аз функсияи ψ ҳосил намудани функсияи $\mathscr{F}[\psi]$-ро *табдилдиҳии Фуре* меноманд. Агар барои функсияи $\psi(x)$ интеграли ғайрихоси

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi(\xi) e^{-i\xi x} d\xi, \quad x \in \mathbb{R}$$

наздикшаванда бошад, функсияи

$$\mathscr{F}^{-1}[\psi] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi(\xi) e^{-i\xi x} d\xi, \quad x \in \mathbb{R}$$

образи барғакси Фуреи функсияи ψ номида мешавад. Протсесси аз функсияи ψ ҳосил намудани функсияи $\mathscr{F}^{-1}[\psi]$-ро *табдилдиҳии барғакси Фуре* меноманд.

Барои на ҳаргуна функсияи ψ функсияҳои $\mathscr{F}[\psi], \mathscr{F}^{-1}[\psi]$ мавҷуд мебошанд. Маълум мешавад, ки агар функсияи ψ-ро аз маҷмӯи

$$S = \left\{ \psi \in C^\infty(\mathbb{R}) : \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| x^m \frac{d^n\psi}{dx^n} \right| < \infty, \quad n, m = 0, 1, ... \right\}$$

гирем, он гоҳ функсияҳои $\mathscr{F}[\psi], \mathscr{F}^{-1}[\psi]$ мавҷуд мебошанд. Масалан, барои $e^{-x^2/2} \in S$

$$\mathscr{F}[e^{\frac{-x^2}{2}}] = e^{\frac{-\xi^2}{2}}, \mathscr{F}^{-1}[e^{\frac{-\xi^2}{2}}] = e^{\frac{-x^2}{2}}$$

аст. Табдилдиҳиҳои $\mathscr{F}, \mathscr{F}^{-1}$ дар маҷмӯи S дорои хосиятҳои зерин мебошанд:

1^0) барои ҳаргуна $\psi \in S \quad \mathscr{F}[\psi], \mathscr{F}^{-1}[\psi] \in S$

$$\mathscr{F}[\mathscr{F}^{-1}[\psi]] = \mathscr{F}^{-1}[\mathscr{F}[\psi]] = \psi$$

мебошад.

2^0) $\forall \psi_1, \psi_2 \in S, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\mathscr{F}[\alpha\psi_1 + \beta\psi_2] = \alpha\mathscr{F}[\psi_1] + \beta\mathscr{F}[\psi_2],$$

$$\mathscr{F}^{-1}[\alpha\psi_1 + \beta\psi_2] = \alpha\mathscr{F}^{-1}[\psi_1] + \beta\mathscr{F}^{-1}[\psi_2];$$

3^0) $\forall\psi \in S, \quad k = 1, 2, ...$

$$\mathscr{F}\left[\frac{d^k\psi}{dx^k}\right] = (i\xi)^k \mathscr{F}[\psi];$$

4^0) $\forall\psi_1, \psi_2 \in S$

$$\mathscr{F}[\psi_1 * \psi_2] = \mathscr{F}[\psi_1]\mathscr{F}[\psi_2],$$

ки ин ҷо функсияи $\psi_1 * \psi_2$ аз рӯи формулаи

$$(\psi_1 * \psi_2)(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi_1(x-s)\psi_2(s)ds$$

муайян шуда, *бастаи функсияҳои* ψ_1, ψ_2 номида мешавад.

Барои функсияҳои ихтиёрии ψ_1, ψ_2 функсияи $\psi_1 * \psi_2$ мавҷуд нест. Лекин барои ҳаргуна функсияҳои $\psi_1, \psi_2 \in S$ бастаи онҳо мавҷуд аст.

Исботи теорема. Табдилдиҳиҳои $\mathscr{F}, \mathscr{F}^{-1}$ ва хосиятҳои $1^0 - 4^0$-ро истифода бурда, ҳалли масъалаи (16.1) - (16.2)-ро меёбем. Фарз мекунем, ки ҳалли $u(t,x)$-и масъалаи Коши барои ҳар як қимати $t \in [0;T]$ ҳамчун функсияи аз x вобаста ба маҷмӯи S тааллуқ дорад: $u(t,\cdot) \in S$. Ба ҳар ду тарафи баробариҳои (16.1), (16.2) табдилдиҳии $\mathscr{F}$-ро тадбиқ мекунем:

$$\begin{cases} \mathscr{F}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right] = \mathscr{F}\left[a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right], \\ \mathscr{F}[u(0,\cdot)] = \mathscr{F}[\varphi], \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\mathscr{F}[u(t,\cdot)] + a^2\xi^2\mathscr{F}[u(t,\cdot)] = 0, \\ \mathscr{F}[u(t,\cdot)]_{t=0} = \mathscr{F}[\varphi]. \end{cases}$$

Ҳалли ин масъаларо меёбем:

$$\mathscr{F}[u(t,\cdot)] = \mathscr{F}[\varphi] \cdot e^{-a^2\xi^2 t}.$$

Табдилдиҳии $\mathscr{F}^{-1}$-ро тадбиқ намуда, дар асоси хосияти 4^0 ҳосил мекунем:

$$|u(t,x)| = \mathscr{F}^{-1}[\mathscr{F}[\varphi]\cdot e^{-a^2\xi^2 t}] = \mathscr{F}^{-1}[\mathscr{F}[\varphi]]\cdot\mathscr{F}^{-1}[e^{-a^2\xi^2 t}] =$$

$$= \varphi(x) \cdot \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}} ds.$$

Ҳамин тариқ, табдилдиҳии Фуреро истифода бурда нишон додем, ки агар ҳалли масъалаи (16.1) - (16.2) мавҷуд буда, барои ҳар як қимати $t \in [0;T]$ $u(t,\cdot) \in S$ бошад, он гоҳ ин ҳал тавассути интеграли Пуассон ёфта мешавад.

Акнун нишон медиҳем, ки агар функсияи $\varphi(x)$ дар $\mathbb{R}$ бефосила ва маҳдуд бошад, формулаи (16.3) ҳалли маҳдуди масъалаи (16.1) - (16.2)-ро муайян мекунад.

Азбаски функсияи $\varphi(x)$ маҳдуд аст, бинобарон барои ҳар як қиматҳои $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$ интеграли ғайрихоси (16.3) наздикшаванда буда, қимати функсияи u дар нуқтаи (t,x) муайян аст. Ба осонӣ дидан мумкин аст, ки $u \in C^{1,2}(\Pi)$

мебошад. Месанҷем, ки $u \in C(\overline{\Pi})$ аст. Аз нобаробарии

$$|u(t,x)| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi(x)| \cdot \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}} ds =$$

$$= \sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi(x)| \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} ds = \sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi(x)| = M$$

маҳдуд будани $u(t,x)$ дар Π мебарояд.

Нишон медиҳем, ки

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} u(t,x) = \varphi(x)$$

аст. Он гоҳ собит мегардад, ки $u \in C(\overline{\Pi})$ буда, шарти авваларо қаноат мекунонад. Фарқи $(u(t,x) - \varphi(x))$-ро баҳо медиҳем:

$$|u(t,x) - \varphi(x)| = \left| \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}} ds - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-\tau^2} \tau \right| =$$

(гузориши $s = x + 2a\sqrt{t}\xi$-ро иҷро мекунем:)

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (\varphi(x + 2a\sqrt{t}\xi) - \varphi(x)) e^{-\xi^2} d\xi \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \big|\varphi(x + 2a\sqrt{t}\xi) - \varphi(x)\big| e^{-\xi^2} d\xi =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\int\limits_{-\infty}^{-N} + \int\limits_{-N}^{N} + \int\limits_{N}^{+\infty} \right) \big|\varphi(x + 2a\sqrt{t}\xi) - \varphi(x)\big| e^{-\xi^2} d\xi \leq$$

$$\leq \frac{2M}{\sqrt{\pi}} \left(\int\limits_{-\infty}^{-N} e^{-\xi^2} d\xi + \int\limits_{N}^{+\infty} e^{-\xi^2} d\xi \right) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-N}^{N} \big|\varphi(x + 2a\sqrt{t}\xi) - \varphi(x)\big| e^{-\xi^2} d\xi.$$

Адади мусбати N-ро чунон калон мегирем, ки барои ε-и додашудаи мусбат нобаробарии

$$\frac{2M}{\sqrt{\pi}} \left(\int\limits_{-\infty}^{-N} e^{-\xi^2} d\xi + \int\limits_{N}^{+\infty} e^{-\xi^2} d\xi \right) < \frac{\varepsilon}{2}$$

иҷро шавад. Акнун адади мусбати δ-ро тавре интихоб мекунем, ки ҳангоми $0 < t < \delta, (\delta = \delta(N, \varepsilon))$ будан, нобаробарии

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-N}^{N} \big|\varphi(x + 2a\sqrt{t}\xi) - \varphi(x)\big| e^{-\xi^2} d\xi < \frac{\varepsilon}{2}$$

иҷро шавад. Он гоҳ ҳангоми $0 < t < \delta$ будан,

$$|u(t,x) - \varphi(x)| < \varepsilon$$

мешавад. Пас $u(t,x)$ дар $\overline{\Pi}$ бефосила буда, шарти аввалаи (16.2)-ро қаноат мекунонад.

Дар ҳар як нуқтаи $(t,x)\in\Pi$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{1}{4at\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(s)e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2t}}ds+\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(s)\frac{(x-s)^2}{4a^2t^2}e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2t}}ds=$$
$$=\left(-\frac{1}{2t}+\frac{(x-s)^2}{4a^2t^2}\right)u,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(s)\frac{s-x}{2a^2t}e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2t}}ds=\frac{s-x}{2a^2t}u,$$

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{s-x}{2t}u\right)=-\frac{1}{2t}u+\frac{s-x}{2t}\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{2t}u+\frac{s-x}{2t}\frac{s-x}{2a^2t}u=$$
$$=\left(-\frac{1}{2t}+\frac{(s-x)^2}{4a^2t^2}\right)u=\frac{\partial u}{\partial t}$$

аст. Яъне $u(t,x)$ ҳалли муодилаи (16.1) мебошад.

Теорема исбот шуд.

Принсипи Дюамел ва формулаи (16.3)-ро истифода бурда нишон додан мумкин аст, ки ҳалли масъалаи Коши барои муодилаи ғайриякҷинсаи

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(t,x),\quad t>0,\quad x\in\mathbb{R}$$

аз рӯи формулаи зерин ёфта мешавад:

$$u(t,x)=\int\limits_0^t\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(\tau,s)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2(t-\tau)}}dsd\tau+\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(s)e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2t}}ds.$$

Акнун корректнокии масъалаи (16.1) - (16.2)-ро дида мебароем.

Теоремаи 16.2. *Масъалаи* (16.1) -(16.2) *дар синфи функсияҳои маҳдуд корректӣ аст.*

Исбот. Мавҷудияти ҳалли маҳдуди масъала дар теоремаи 16.1 исбот шуд. Нишон медиҳем, ки ин ҳал ягона буда, аз функсияи $\varphi(x)$ бефосила вобаста аст.

Бигзор u_1,u_2 ҳалҳои маҳдуди ба функсияҳои маҳдуди φ_1,φ_2 мувофиқи масъала бошанд. Он гоҳ функсияи $v=u_1-u_2, v\in C^{1,2}(\Pi)\cap C(\overline{\Pi})$ ҳалли маҳдуди муодилаи

$$\frac{\partial v}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2},\quad t>0,\quad x\in\mathbb{R}$$

мешавад. Мувофиқи теоремаи 15.2 барои функсияи v нобаробариҳои зерин ҷой доранд:

$$\inf_{x\in\mathbb{R}}v(0,x)\le v(t,x)\le\sup_{x\in\mathbb{R}}v(0,x),$$

$$\inf_{x\in\mathbb{R}}(\varphi_1(x)-\varphi_2(x))\le u_1(t,x)-u_2(t,x)\le\sup_{x\in\mathbb{R}}(\varphi_1(x)-\varphi_2(x)),\quad (t,x)\in\Pi.$$

Аз ин нобаробариҳо аён аст, ки ҳал ягона буда, аз функсияи аввала бефосила вобаста аст.

Теорема исбот шуд.

Бо $S_m, m \geq 0$ синфи (маҷмӯи) он функсияҳои $u(t,x)$-ро ишорат мекунем, ки дар $\overline{\Pi}$ бефосила буда, бо ягон доимиҳои M, α шарти

$$\max_{0 \leq t \leq T} |u(t,x)| \leq M e^{\alpha |x|^m}, \quad x \in \mathbb{R}$$

-ро қаноат мекунонанд. S_0 синфи функсияҳои дар $\overline{\Pi}$ бефосила ва маҳдуд мебошад.

Дар теоремаи 16.2 тавассути теоремаи 15.2 ягонагии ҳалли масъалаи (16.1) -(16.2) дар синфи S_0 исбот шуд. Исботи теоремаи 15.2-ро мукаммал намуда нишон додан мумкин аст, ки ҳалли масъалаи (16.1) -(16.2) дар синфи $S_2, (S_0 \subset S_2)$ ягона аст. Аз тарафи академик Тихонов А.Н. аввалин маротиба исбот карда шудааст, ки барои ҳаргуна ададИ $m > 2$ ҳалли масъалаи (16.1) -(16.2) дар синфи S_m ягона нест. Ин тасдиқот барои муодилаҳои хаттии навъи параболии аз ду зиёд тағйирёбандаҳои новобаста дошта низ ҷой дорад.

17. Масъалаи омехта барои муодилаи гармипаҳншавӣ дар меҳвар

Масъалаи омехтаи якӯмро барои муодилаи гармипаҳншавӣ дар меҳвари маҳдуд дида мебароем. Чунин функсияи $u \in C^2(Q) \cap C(\overline{Q}), (Q = (0;T) \times (0;l))$-ро ёфтан лозим аст, муодилаи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (t,x) \in Q \tag{17.1}$$

ва шартҳои аввалаю канории

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \tag{17.2}$$

$$u(t,0) = u(t,l) = 0, \quad 0 \leq t \leq T \tag{17.3}$$

-ро қаноат кунонад.

Ҳалли масъалаи мазкурро бо методи Фуре меёбем. Ҳалро дар намуди суммаи функсияҳои намуди

$$v(t,x) = R(t)X(x), \tag{17.4}$$

ки муодилаи (17.1) ва шартҳои канории (17.3)-ро қаноат мекунонанд, ҷустуҷӯ мекунем. Аввал ин гуна функсияҳоро меёбем. Барои ин (17.4)-ро дар баробариҳои (17.1), (17.3) мегузорем:

$$\begin{cases} R'(t)X(x) = a^2 R(t)X''(x), & (t,x) \in Q, \\ R(t)X(0) = R(t)X(l) = 0, & 0 \leq t \leq T, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{R'(t)}{a^2 R(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda, \\ X(0) = X(l) = 0, \end{cases}$$

$$R'(t) - a^2 \lambda R(t) = 0, \quad 0 < t < T, \tag{17.5}$$

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, & 0 < x < l, \\ X(0) = X(l) = 0. \end{cases} \tag{17.6}$$

Масъалаи (17.6) барои қиматҳои

$$\lambda_n = -\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \quad n = 1, 2, ...$$

ҳалҳои ғайринулии

$$X_n(x) = \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad n = 1, 2, ...$$

-ро дорад. Дар муодилаи (17.5) $\lambda = \lambda_n$ гузошта, ҳалли умумии онро меёбем:

$$R_n(t) = A_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t}.$$

Ҳамин тариқ, маҷмӯи функсияҳои намуди (17.4) дошта, ки ҳалли муодилаи (17.1) буда, шартҳои канории (17.3)-ро қаноат мекунонанд, аз функсияҳои

$$v_n(t, x) = A_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} \cdot \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad n = 1, 2, ...$$

иборат мебошад.

Ҳалли масъалаи (17.1) - (17.3)-ро дар намуди

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} \cdot \sin \frac{\pi n}{l} x \tag{17.7}$$

ҷустуҷӯ мекунем. Барои ёфтани ададҳои $A_n, n = 1, 2, ...$ (17.7)-ро дар шарти аввалаи (17.2) мегузорем:

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \frac{\pi n}{l} x = \varphi(x).$$

Ҳар ду тарафи ин баробариро ба функсияи $\sin \frac{\pi k}{l} x$ зарб карда, аз рӯи фосилаи $[0; l]$ интеграл мегирем:

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \int_0^l \sin \frac{\pi k}{l} x \cdot \sin \frac{\pi n}{l} x dx = \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx,$$

$$A_n \cdot \frac{l}{2} = \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx,$$

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx, \quad n = 1, 2, ... \tag{17.8}$$

Ҳамин тариқ, ҳалли масъалаи омехтаи (17.1) - (17.3) аз рӯи формулаҳои (17.7), (17.8) ёфта мешавад.

Акнун *масъалаи асосноккунии методи Фуреро* барои масъалаи (17.1) - (17.3) дида мебароем.

Теоремаи 17.1. *Бигзор функсияи $\varphi(x)$ шартҳои зеринро қаноат кунонад:*

$$\varphi \in C^1[0; l], \quad \varphi(0) = \varphi(l) = 0. \tag{17.9}$$

Он гоҳ функсияи $u(t, x)$-и тавассути формулаҳои (17.7), (17.8) ёфташаванда дар соҳаи Q ҳосилаҳои тартиби ихтиёриро дошта, ҳалли масъалаи омехтаи (17.1) - (17.3) мешавад.

Исбот. Аз шарти (17.3) бармеояд, ки қатори тригонометрии

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{\pi n}{l} x$$

дар порчаи $[0; l]$ мутлақ ва мунтазам наздикшаванда буда, суммааш ба функсияи $\varphi(x)$ баробар аст. Бинобарон бо назардошти нобаробариҳои

$$0 < e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2} \le 1, \quad t \in [0; T], \quad n \ge 1$$

қатори (17.7) низ мутлақ ва мунтазам наздикшаванда буда, суммаи он - функсияи $u(t, x)$ дар $\overline{Q}$ бефосила мебошад.

Барои ҳар як қимати $t_0 \in (0; T), m = 1, 2, ...$ ва қиматҳои кифоя калони $k, k \ge k_0(t_0, m)$ нобаробарии

$$\left(\frac{\pi k}{l}\right)^{2m} \cdot e^{-\left(\frac{\pi k a}{l}\right)^2 t} < 1, \quad t \in [t_0; T]$$

ҷой дорад. Аз ин рӯ қатори (17.7) ва ҳосилаҳои тартиби ихтиёрии он дар порчаи $[t_0; T]$ мутлақ ва мунтазам наздикшаванда мебошанд. Пас ҳосилаҳои тартиби дилхоҳи функсияи $u(t, x)$ дар соҳаи Q мавҷуд ва бефосила буда,

$$\frac{\partial^{p+q} u}{\partial t^p \partial x^q} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{d^p}{dt^p} e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} \cdot \frac{d^q}{dx^q} \sin \frac{\pi n x}{l}, \quad p, q = 0, 1, 2, ...$$

аст. Аз ин ҷо ҳосил мекунем:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2\right) e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{\pi n x}{l} -$$

$$- a^2 \sum_{n=1}^{\infty} -A_n \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x = 0, \quad (t, x) \in Q,$$

$$u(0, x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{\pi n}{l} x = \varphi(x), \quad x \in [0; l]$$

Яъне $u(t, x)$ ҳалли масъалаи (17.1) - (17.3) мебошад.

Теорема исбот шуд.

Теоремаи 17.2. *Агар шарти* (17.9) *ҷой дошта бошад, масъалаи* (17.1) - (17.3) *корректӣ аст.*

Исбот. Мавҷудияти ҳалли масъала дар теоремаи (17.1) исбот шуд. Нишон медиҳем, ки ин ҳал ягона буда, аз функсияи $\varphi(x)$ бефосила вобаста аст.

Бигзор $u_1(t, x), u_2(t, x)$ ҳалҳои ба функсияҳои $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ мувофиқи масъалаи (17.1) - (17.3) бошанд. Он гоҳ функсияи

$$v(t, x) = u_1(t, x) - u_2(t, x)$$

ҳалли масъалаи зерин мешавад:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad (t, x) \in Q,$$

$$v(0, x) = \psi(x), \quad 0 \le x \le l, \quad \psi = \psi_1 - \psi_2,$$

$$v(t, 0) = v(t, l) = 0, \quad 0 \le t \le T.$$

Аз теоремаи 15.1 бармеояд, ки нобаробариҳои зерин ҷой доранд:

$$\min_{G \cup \Gamma} v(t, x) \le v(t, x) \le \max_{G \cup \Gamma} v(t, x) \quad \forall (t, x) \in \overline{Q},$$

$$\min \left\{0, \min_{0 \le x \le l} \psi(x)\right\} \le v(t, x) \le \max \left\{0, \max_{0 \le x \le l} \psi(x)\right\} \quad \forall (t, x) \in \overline{Q},$$

$$\max_{\overline{Q}} |v(t,x)| \leq \max_{0 \leq x \leq l} |\psi(x)|,$$
$$\max_{\overline{Q}} |u_1(t,x) - u_2(t,x)| \leq \max_{0 \leq x \leq l} |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)|.$$

Аз нобаробарии охирин аён мегардад, ки ҳалли масъалаи (17.1) - (17.3) ягона буда, аз функсияи $\varphi(x)$ бефосила вобаста аст.

Теорема исбот шуд.