Боби IV. Муодилаҳои навъи эллипсӣ

Дар боби мазкур масъалаҳои канорӣ барои муодилаҳои навъи эллипсӣ дар мисоли муодилаи

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = f(x_1, ..., x_n)$$

омӯхта мешаванд.

18. Гузориши масъалаҳо барои муодилаҳои навъи эллипсӣ

Бигзор Ω ягон соҳаи маҳдуд дар $\mathbb{R}^n$ бошад, ки сарҳадаш $\partial\Omega$ сатҳи суфта аст. Минбаъд *сатҳи суфта* гуфта чунин маҷмӯи S-и нуқтаҳои фазои $\mathbb{R}^n$-ро меномем, ки шартҳои зеринро қаноат мекунонад:

1) функсияи бефосила дифференсиронидашавандаи $F(x), x \in \mathbb{R}^n$ мавҷуд аст, ки барои дилхоҳ $x \in S$

$$F(x) = 0, \quad \nabla F(x) \neq 0$$

аст;

2) ададҳои $C > 0,\ 0 < \alpha \leq 1$ мавҷуданд, ки барои вектор-функсияи нормали $p(x)$-и сатҳ нобаробарии зайл ҷой дорад:

$$|p(x) - p(y)| \geq C|x - y|^\alpha \quad \forall x, y \in S.$$

Барои муодилаи

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = f(x), \quad x = (x_1, ..., x_n) \tag{18.1}$$

масъалаҳои зерин гузошта мешаванд.

Масъалаи канории I. Функсияи $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ ёфта шавад, ки дар соҳаи Ω ҳалли муодилаи (18.1) буда, дар сарҳади соҳа шарти канории Дирихле

$$u\big|_{\partial\Omega} = \varphi_1(x) \tag{18.2}$$

-ро қаноат кунонад.

Масъалаи канории II. Функсияи $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ ёфта шавад, ки дар соҳаи Ω ҳалли муодилаи (18.1) буда, дар сарҳади соҳа шарти канории Нейман

$$\frac{\partial u}{\partial p}\big|_{\partial\Omega} = \varphi_2(x), \quad p(x) - \text{нормал ба сатҳи } \partial\Omega \text{ дар нуқтаи } x \tag{18.3}$$

-ро қаноат кунонад.

Масъалаи канории III. Функсияи $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ ёфта шавад, ки дар соҳаи Ω ҳалли муодилаи (18.1) буда, дар сарҳади соҳа шарти канории Робен

$$\left(\frac{\partial u}{\partial p} + \sigma(x) u\right)\bigg|_{\partial\Omega} = \varphi_3(x) \tag{18.4}$$

-ро қаноат кунонад.

Масъалаҳои канории I, II, III-ро мувофиқан масъалаҳои Дирихле, Нейман, Робен меноманд. Агар дар гузориши масъалаҳои Дирихле, Нейман, Робен чунин тағйирот дарорем, ки функсияи u на дар дохили соҳаи Ω, балки дар беруни соҳа ҳалли муодилаи (18.1) шавад, он гоҳ масъалаҳои ҳосилшавандаро *масъалаҳои берунии* Дирихле, Нейман, Робен меноманд.

Чуноне ки дар параграфи 6 зикр гардид, масъалаи Коши барои муодилаи навъи эллипсӣ ғайрикорректӣ мебошад. Бинобарон муодилаҳои навъи эллипсиро танҳо бо шартҳои канорӣ меомӯзем.

19. Формулаҳои Грин

Бо формулаҳое шинос мешавем, ки бо номи *формулаҳои Грин* маъмул буда, дар мавриди омӯзиши муодилаҳои навъи эллипсӣ роли муҳимро мебозанд.

Формулаи якӯми Грин. Барои функсияҳои $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, $v \in C^1(\overline{\Omega})$ баробарии зерин ҷой дорад:

$$\int\limits_{\Omega} v\Delta u dx = -\int\limits_{\Omega} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_k}\frac{\partial u}{\partial x_k} dx + \int\limits_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial p} ds. \tag{19.1}$$

Исбот. Бигзор Ω_1 ягон соҳаи сарҳадаш суфтае бошад, ки $\overline{\Omega}_1 \in \Omega$ аст. Барои функсияҳои u, v

$$\int\limits_{\Omega_1} v\Delta u dx = \int\limits_{\Omega_1} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(v\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) dx - \int\limits_{\Omega_1} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_k}\frac{\partial u}{\partial x_k} dx$$

аст. Формулаи аз курси таҳлили математикӣ маълуми Остроградскийро истифода бурда, интеграли якӯми тарафи рости баробарии охиронро чунин табдил додан мумкин аст:

$$\int\limits_{\partial\Omega_1} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(v\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) dx = \int\limits_{\partial\Omega_1} \sum_{k=1}^{n} v\frac{\partial u}{\partial x_k} \cos(\widehat{\overrightarrow{p}OX_k}) ds =$$

$$= \int\limits_{\partial\Omega_1} v\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_k} \cos(\widehat{\overrightarrow{p}OX_k}) ds = \int\limits_{\partial\Omega_1} v\frac{\partial u}{\partial p} ds.$$

Пас

$$\int\limits_{\Omega_1} v\Delta u dx = -\int\limits_{\Omega_1} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_k}\frac{\partial u}{\partial x_k} dx + \int\limits_{\partial\Omega_1} v\frac{\partial u}{\partial p} ds$$

аст. Дар ин баробарӣ соҳаи Ω_1-ро ба соҳаи Ω кифоя наздик гирифта, формулаи (19.1)-ро ҳосил мекунем.

Формулаи дуюми Грин. Барои функсияҳои $u, v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ баробарии зерин дуруст аст:

$$\int\limits_{\Omega} (v\Delta u - u\Delta v) dx = \int\limits_{\partial\Omega} \left(v\frac{\partial u}{\partial p} - u\frac{\partial v}{\partial p}\right) ds. \tag{19.2}$$

Исбот. Мувофиқи формулаи якӯми Грин барои функсияҳои u, v баробариҳои зерин ҷой доранд:

$$\int\limits_{\Omega} v\Delta u dx = -\int\limits_{\Omega} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_k}\frac{\partial u}{\partial x_k} dx + \int\limits_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial p} ds,$$

$$\int\limits_{\Omega} u\Delta v dx = -\int\limits_{\Omega} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial v}{\partial x_k} dx + \int\limits_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial p} ds.$$

Аз баробарии якӯм дуюмашро тарҳ карда, формулаи (19.2)-ро ҳосил мекунем.

Функсияи

$$E(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln|x|, & n = 2 \\ \frac{1}{(2-n)\sigma_n}|x|^{2-n}, & n \geq 3 \end{cases}$$

-ро *ҳалли фундаменталии* муодилаи Лаплас меноманд. Ин ҷо σ_n - масоҳати сатҳи сфераи воҳидии фазои $\mathbb{R}^n, x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, |x| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$ аст. Ҳангоми $y \neq x$ будан функсияи $E(x-y)$ ҳамчун функсияи аз y вобаста ҳалли муодилаи Лаплас мебошад:

$$\Delta E(x-y) = 0.$$

Формулаи сеюми Грин. Барои функсияи $u \in C^2(\overline{\Omega})$ баробарии зерин ҷой дорад:
(19.3)

$$\gamma(x)u(x) = \int\limits_{\Omega} E(x-y)\Delta u(y)dy + \int\limits_{\partial\Omega} \left(u(y)\frac{\partial E(x-y)}{\partial p(y)} - E(x-y)\frac{\partial u(y)}{\partial p(y)} \right) ds_y,$$

ки ин ҷо

$$\gamma(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega \\ 0,5, & x \in \partial\Omega \\ 0, & x \notin \overline{\Omega} \end{cases}$$

аст.

Исбот. Бигзор $x \in \Omega$ бошад. Адади ε-ро тавре интихоб мекунем, ки курраи марказаш дар нуқтаи x ва радиусаш ε-и $B(x,\varepsilon)$ дар дохили соҳаи Ω хобад. Дар соҳаи $\Omega \setminus B(x,\varepsilon)$ барои функсияҳои $u(y), E(x-y)$ формулаи дуюми Гринро менависем:

$$\int\limits_{\Omega \setminus B(x,\varepsilon)} (u(y)\Delta E(x-y) - E(x-y)\Delta u(y))\, dy =$$

$$= \int\limits_{\partial(\Omega \setminus B(x,\varepsilon))} \left(u(y)\frac{\partial E(x-y)}{\partial p(y)} - E(x-y)\frac{\partial u(y)}{\partial p(y)} \right) ds_y.$$

Лекин

$$\int\limits_{\Omega \setminus B(x,\varepsilon)} u(y)\Delta E(x-y)dy = 0,$$

$$\int\limits_{\partial(\Omega \setminus B(x,\varepsilon))} \left(u(y)\frac{\partial E(x-y)}{\partial p(y)} - E(x-y)\frac{\partial u(y)}{\partial p(y)} \right) ds_y =$$

$$= \int\limits_{\partial\Omega} \left(u(y)\frac{\partial E(x-y)}{\partial p(y)} - E(x-y)\frac{\partial u(y)}{\partial p(y)} \right) ds_y -$$

$$- \int\limits_{\partial B(x,\varepsilon)} \left(u(y)\frac{\partial E(x-y)}{\partial p(y)} - E(x-y)\frac{\partial u(y)}{\partial p(y)} \right) ds_y,$$

барои $y \in \partial B(x,\varepsilon)$

$$\frac{\partial E(x-y)}{\partial p(y)} = \frac{\partial E(x-y)}{\partial (y-x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial E(x-y)}{\partial y_k} \cdot \frac{y_k - x_k}{|y-x|} =$$

$$\left[\begin{array}{ll} n = 2, & \frac{\partial E(x-y)}{\partial y_k} = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y_k} \ln|x-y| = \frac{y_k - x_k}{2\pi|y-x|^2}, \\ n \geq 3, & \frac{\partial E(x-y)}{\partial y_k} = \frac{1}{(2-n)\sigma_n}\frac{\partial}{\partial y_k}|y-x|^{2-n} = \frac{y_k - x_k}{\sigma_n|y-x|^n} \end{array} \right.$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{y_k - x_k}{\sigma_n |y-x|^n} \cdot \frac{y_k - x_k}{|y-x|} = \frac{1}{\sigma_n |y-x|^{n-1}} = \frac{1}{\sigma_n \varepsilon^{n-1}}$$

аст. Бинобарон баробарии болоӣ чунин намуд мегирад:

(19.4)

$$- \int\limits_{\Omega \setminus B(x,\varepsilon)} E(x-y)\Delta u(y)dy = \int\limits_{\partial\Omega} \left(u(y)\frac{\partial E(x-y)}{\partial p(y)} - E(x-y)\frac{\partial u(y)}{\partial p(y)} \right) ds_y -$$

$$- \frac{1}{\sigma_n \varepsilon^{n-1}} \int\limits_{\partial B(x,\varepsilon)} u(y)ds_y + \int\limits_{\partial B(x,\varepsilon)} E(x-y)\frac{\partial u(y)}{\partial p(y)} ds_y.$$

Азбаски барои $y \in \partial B(x,\varepsilon)$

$$E(x-y) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\ln\varepsilon, & n = 2 \\ \frac{1}{(2-n)\sigma_n}\varepsilon^{2-n}, & n \geq 3 \end{cases}$$

ва

$$\int\limits_{\partial B(x,\varepsilon)} ds_y = \sigma_n \varepsilon^{n-1}$$

мебошанд, бинобарон хосияти қимати миёнаи интегралро истифода бурда ҳосил мекунем:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\sigma_n \varepsilon^{n-1}} \int\limits_{\partial B(x,\varepsilon)} u(y)ds_y = \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\frac{1}{\sigma_n \varepsilon^{n-1}} u(y_\varepsilon) \int\limits_{\partial B(x,\varepsilon)} ds_y \right) = \lim_{\varepsilon\to 0} u(y_\varepsilon) = u(x),$$

$$y_\varepsilon \in \partial B(x,\varepsilon),$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\partial B(x,\varepsilon)} E(x-y)\frac{\partial u(y)}{\partial p(y)} ds_y = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\partial B(x,\varepsilon)} \frac{\partial u(y)}{\partial p(y)} ds_y \cdot \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\ln\varepsilon, & n = 2 \\ \frac{1}{(2-n)\sigma_n}\varepsilon^{2-n}, & n \geq 3 \end{cases} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\partial u(y)}{\partial p(y)}(z_\varepsilon) \cdot \begin{cases} \varepsilon\ln\varepsilon, & n = 2 \\ \frac{\varepsilon}{2-n}, & n \geq 3 \end{cases} = 0$$

Инро ба назар гирифта, дар баробарии (19.4) ҳангоми $\varepsilon \to 0$ ба ҳудуд гузашта, баробарии (19.3)-ро барои ҳолати $x \in \Omega$ ҳосил мекунем.

Бигзор $x \in \partial\Omega$ бошад. Акнун бо B_ε қисми дар Ω хобандаи курраи марказаш дар нуқтаи x ва радиусаш ε-ро ишорат карда, муҳокимарониҳои болоиро такрор мекунем. Фақат ҷои фарқкунандааш дар он мебошад, ки аз сабаби суфта будани сатҳи $\partial\Omega$, барои қиматҳои кифоя хурди ε масоҳати сатҳи ∂B_ε қариб ба масоҳати сатҳи нимсфераи радиусаш ε баробар буда, бо ҳамин сабаб

$$\int\limits_{\partial B_\varepsilon} u(y)\frac{\partial}{\partial p(y)}E(x-y)ds_y \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2}u(x)$$

мешавад. Дар натиҷа баробарии (19.3)-ро барои ҳолати $x \in \partial\Omega$ ҳосил мекунем.

Агар $x \notin \overline{\Omega}$ бошад, он гоҳ

$$E(x-y) \in C^2(\overline{\Omega}), \quad \Delta E(x-y) = 0, \quad y \in \overline{\Omega}$$

мешавад. Бинобарон дар соҳаи Ω ба функсияҳои $u(y), E(x-y)$ формулаи дуюми Гринро тадбиқ намуда, бевосита формулаи (19.3)-ро барои ҳолати $x \notin \overline{\Omega}$ ҳосил мекунем.

Формулаи сеюми Грин исбот шуд.

Формулаи сеюми Грин имконият медиҳад, ки аз рӯи қиматҳои Δu дар Ω ва қиматҳои $\frac{\partial u}{\partial p}, u$ дар $\partial\Omega$ қимати функсияи u-ро дар дилхоҳ нуқтаи соҳаи Ω ёбем. Аз ин хотир формулаи мазкурро *тасвири интегралии функсия* тавассути ҳалли фундаменталии муодилаи Лаплас низ меноманд.

Дар тарафи рости формулаи (19.3) интегралҳои намуди зерин иштирок доранд:

$$\int\limits_{\Omega} E(x-y) g_1(y) dy,$$

$$\int\limits_{\partial\Omega} E(x-y) g_2(y) ds_y,$$

$$\int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial E(x-y)}{\partial p(y)} g_3(y) ds_y.$$

Ин интегралҳоро мувофиқан *потенсиали ҳаҷмии зичиаш* g_1, *потенсиали яккабатаи зичиаш* g_2, *потенсиали дуқабатаи зичиаш* g_3 меноманд. Потенсиалҳои яккабатаю дуқабатаро *потенсиалҳои сатҳӣ* низ меноманд. Маълум мешавад, ки дар ҳар як нуқтаи $x \notin \partial\Omega$ потенсиалҳои сатҳӣ ҳосилаҳои тартиби ихтиёриро доранд.

20. Хосиятҳои функсияҳои гармоникӣ

Функсияи $u(x)$ дар соҳаи Ω *гармоникӣ* номида мешавад, агар дар соҳаи Ω ҳалли муодилаи Лаплас бошад:

$$\Delta u(x) = 0, \quad x \in \Omega.$$

Бо як қатор хосиятҳои ҷолиби функсияҳои гармоникӣ шинос мешавем, ки ин хосиятҳоро на ҳаргуна функсияи ду маротиба бефосила дифференсиронидашаванда доро мебошад.

Хосияти 1. Агар функсияи $u(x)$ дар соҳаи Ω гармоникӣ бошад, он гоҳ дар нуқтаҳои ин соҳа ҳосилаҳои тартиби дилхоҳро дорад.

Исбот. Бигзор x_0 нуқтаи ихтиёрии соҳаи Ω бошад. Ягон соҳаи $\Omega_0, \overline{\Omega}_0 \subset \Omega$-ро интихоб мекунем, ки нуқтаи x_0 дар дохили он хобад. Барои функсияи $u(x)$ дар соҳаи Ω_0 формулаи сеюми Гринро тадбиқ намуда ҳосил мекунем:

$$u(x) = \int\limits_{\partial\Omega_0} \left(u(y) \frac{\partial E(x-y)}{\partial p(y)} - E(x-y) \frac{\partial u(y)}{\partial p(y)} \right) ds_y, \quad x \in \Omega_0. \tag{20.1}$$

Азбаски тарафи рости баробарии мазкур аз суммаи потенсиалҳои сатҳӣ иборат буда, потенсиалҳои сатҳӣ дар нуқтаҳои соҳаи Ω_0 ҳосилаҳои тартиби дилхоҳро доранд, бинобарон аз ин баробарӣ бармеояд, ки функсияи u дар нуқтаи x_0 ҳосилаҳои тартиби дилхоҳро дорад.

Хосияти 2. Барои функсияи дар соҳаи Ω гармоникии $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ баробарии зерин дуруст аст:

$$\int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial p} ds = 0.$$

Исбот. Барои функсияҳои $u(x)$ ва $v(x) \equiv 1$ формулаи якӯми Гринро навишта, баробарии мазкурро ҳосил мекунем.

Хосияти 3. Қимати функсияи дар соҳаи Ω гармоникии $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ дар маркази курраи $B_R = \{x : |x - x_0| < R\}, B_R \subset \Omega$ ба миёнаи арифметикии қиматҳои он дар сфераи ∂B_R баробар аст:

$$u(x_0) = \frac{1}{\sigma_n R^{n-1}} \int\limits_{\partial B_R} u(y) ds_y. \tag{20.2}$$

Исбот. Аз баробарии (20.1) барои $0 < \rho < R$ ҳосил мекунем:

$$u(x_0) = \int\limits_{\partial B_\rho} \left(u(y) \frac{\partial E(x_0 - y)}{\partial p(y)} - E(x_0 - y) \frac{\partial u(y)}{\partial p(y)} \right) ds_y =$$

$$= \frac{1}{\sigma_n \rho^{n-1}} \int\limits_{\partial B_R} u(y) ds_y - c_\rho \int\limits_{\partial B_R} \frac{\partial u(y)}{\partial p(y)} ds_y = \frac{1}{\sigma_n \rho^{n-1}} \int\limits_{\partial B_R} u(y) ds_y.$$

Дар ин баробарӣ ҳангоми майл кардани ρ ба R ба ҳудуд гузашта, формулаи (20.2)-ро ҳосил мекунем.

Хосияти 4 (принсипи максимум). Функсияи дар соҳаи Ω гармоникии $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $u \not\equiv const$ қиматҳои калонтарин ва хурдтаринашро дар нуқтаҳои дохилии соҳаи Ω қабул карда наметавонад:

$$\min_{y \in \partial\Omega} u(y) < u(x) < \max_{y \in \partial\Omega} u(y), \quad x \in \Omega.$$

Исбот. Бигзор

$$M = \max_{x \in \overline{\Omega}} u(x)$$

ва нуқтаи $x_0 \in \Omega$ мавҷуд бошад, ки $u(x_0) = M$ аст. Нишон медиҳем, ки барои дилхоҳ $x \in \Omega$ низ $u(x) = M$ мешавад.

Ба осонӣ дидан мумкин аст, ки шумораи охирноки курраҳои кушоди

$$B(x_0, \rho), B(x_1, \rho), ..., B(x_k, \rho) = B(x, \rho)$$

мавҷуд мебошанд, ки бо сарбасташон дар соҳаи Ω хобида, барои ҳар як қимати $i = \overline{1, k}$ нуқтаи x_i дар $B(x_{i-1}, \rho)$ мехобад.

Агар дар $B(x_0, \rho)$ нуқтаи x_* мавҷуд бошад, ки барои он нобаробарии $u(x_*) < M$ иҷро мешавад, он гоҳ ин нобаробарӣ барои нуқтаҳои ягон атрофи хурди нуқтаи x_* низ ҷой дошта, мувофиқи хосияти 3

$$u(x_0) = \frac{1}{\sigma_n |x_0 - x_*|^{n-1}} \int\limits_{\partial B(x_0, |x_0 - x_*|)} u(y) ds_y < \frac{M}{\sigma_n |x_0 - x_*|^{n-1}} \int\limits_{\partial B(x_0, |x_0 - x_*|)} ds_y = M$$

мешавад. Пас барои ҳаргуна $y \in B(x_0, \rho)$ $u(y) = M$ аст. Азбаски $x_1 \in B(x_0, \rho)$ мебошад, бинобарон $u(x_1) = M$ мешавад. Мулоҳизаҳои болоиро барои $B(x_1, \rho)$ такрор намуда, ҳосил мекунем, ки $u(y) = M \quad \forall y \in B(x_1, \rho)$ аст. Ин муҳокимарониҳоро барои курраҳои боқимонда давом дода, дар натиҷа ба M баробар будани қимати $u(x)$-ро ҳосил мекунем. Пас $\forall x \in \Omega \quad u(x) = M$ аст. Ин ба шарти теорема зид буда, нишон медиҳад, ки дар ягон нуқтаи дохилии соҳаи Ω қимати функсия ба M баробар шуда наметавонад.

Айнан ҳамин тавр, бо истифода аз хосияти 3, нишон додан мумкин аст, ки функсияи u қимати хурдтаринашро дар ягон нуқтаи дохилии соҳаи Ω қабул намекунад. Хосияти 4 исбот шуд.

Аз хосияти 4 мусалламан хосиятҳои зерин мебароянд.

Хосияти 5. Функсияи дар соҳаи Ω гармоникӣ дар дохили соҳа нуқтаҳои минимум ё максимуми локалӣ дошта наметавонад.

Хосияти 6. Барои функсияи дар соҳаи Ω гармоникии $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ нобаробарии зерин ҷой дорад:

$$|u(x)| \leq \max_{y \in \partial\Omega} |u(y)|, \quad x \in \overline{\Omega}.$$

Хосияти 7. Агар пайдарпаии функсияҳои дар соҳаи Ω гармоникии $u_n \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}), n = 1, 2, ...$ дар $\partial\Omega$ мунтазам наздикшаванда бошад, он гоҳ ин пайдарпаӣ дар $\overline{\Omega}$ низ мунтазам наздикшаванда мешавад.

Ба ғайр аз хосиятҳои 1 - 7 функсияҳои гармоникӣ дорои хосиятҳои зайл мебошанд, ки онҳоро бе исбот меорем.

Хосияти 8. Ҳаргуна функсияи дар $\mathbb{R}^n$ гармоникии $u(x)$, ки бо ягон ададҳои ғайриманфии C, m шарти

$$|u(x)| \leq C(1 + |x|)^m, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

-ро қаноат мекунонад, бисёраъзогие мебошад, ки дараҷааш аз m зиёд нест (теоремаи Луивилл).

Хосияти 9. Агар функсияи $u(x)$ дар беруни кураи $B(0, R)$ гармоникӣ бошад, функсияи

$$u^*(x^*) = \left(\frac{R}{x^*}\right)^{n-2} \cdot u(\frac{R^2}{|x^*|^2} x^*),$$

*ки **табдилдиҳии Келвини** функсияи u меноманд, дар соҳаи $B(0, R) \setminus \{0\}$ гармоникӣ мешавад.*

Хосияти 10. Агар функсияи u дар соҳаи $\Omega \setminus \{x_0\}, (x_0 \in \Omega)$ гармоникӣ буда, дар нуқтаи x_0 шарти

$$\lim_{x \to x_0} \frac{u(x)}{E(x - x_0)} = 0$$

-ро қаноат кунонад, он гоҳ функсияи u-ро дар нуқтаи x_0 тавре муайян кардан мумкин аст, ки вай дар соҳаи Ω гармоникӣ мешавад.

21. Функсияи Грини масъалаи Дирихле

Функсияи Грини масъалаи Дирихле гуфта функсияи $G(x, y), \quad x \in \overline{\Omega}, \quad y \in \Omega$-ро меноманд, ки шартҳои зеринро қаноат мекунонад:

1) $G(x, y) = E(x - y) + g(x, y)$, ки ин ҷо функсияи $g(x, y)$ нисбат ба тағйирёбандаи x дар соҳаи Ω гармоникӣ ва дар $\overline{\Omega}$ бефосила мебошад;

2) барои ҳар як $y \in \Omega$ шарти канории

$$G(x, y)\big|_{x \in \partial\Omega} = 0$$

иҷро мешавад.

Хосиятҳои функсияи Гринро дида мебароем.

Хосияти 1. Функсияи Грини масъалаи Дирихле ягона буда, нобаробарии зерин ҷой дорад:

$$G(x, y) < 0 \quad \forall x, y \in \Omega, \quad x \neq y.$$

Исбот. Бигзор

$$G_1(x, y) = E(x - y) + g_1(x, y),$$
$$G_2(x, y) = E(x - y) + g_2(x, y)$$

функсияҳои Грини масъалаи Дирихле бошанд. Он гоҳ функсияи

$$u(\cdot, y) = G_1(\cdot, y) - G_2(\cdot, y)$$

аз синфи $C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$ буда, дар соҳаи Ω гармоникӣ мебошад ва шарти канории

$$u(\cdot, y)\big|_{\partial\Omega} = 0$$

-ро қаноат мекунонад. Пас мувофиқи хосияти 6-и функсияҳои гармоникӣ $u(\cdot, y) \equiv 0$ аст. Яъне функсияи Грин ягона аст.

Барои ҳар як $y \in \Omega$ ва адади кифоя хурди мусбати ε функсияи $G(x, y)$ дар сарбасти соҳаи $\Omega \setminus B(y, \varepsilon)$ бефосила буда, дар дохилаш гармоникӣ мебошад. Бинобарон мувофиқи хосияти 4-и функсияҳои гармоникӣ

$$G(x, y) < \max_{s\in\partial(\Omega\setminus B(y,\varepsilon))} G(s, y) \quad \forall x \in \Omega \setminus B(y, \varepsilon)$$

мешавад. Азбаски

$$\lim_{x\to y} G(x, y) = -\infty$$

мебошад, пас

$$\max_{x\in\partial B(y,\varepsilon)} G(x, y) < 0, \quad \max_{x\in\partial\Omega} G(x, y) = 0$$

ва

$$G(x, y) < 0 \quad \forall x \in \Omega \setminus B(y, \varepsilon)$$

аст. Акнун ε-ро ба нул майл кунонда, нобаробарии

$$G(x, y) < 0 \quad \forall x, y \in \Omega, \quad x \neq y$$

-ро ҳосил мекунем. Хосияти 1 исбот шуд.

Хосияти 2. Функсияи $g(x, y)$ дар $\overline{\Omega} \times \Omega$ бефосила аст.

Исбот. Барои ҳаргуна ду нуқтаҳои $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \overline{\Omega} \times \Omega$

$$\begin{aligned}|g(x_1, y_1) - g(x_2, y_2)| &\leq |g(x_1, y_1) - g(x_2, y_1)| + |g(x_2, y_1) - g(x_2, y_2)| \leq \\ &\leq \max_{x\in\partial\Omega} |g(x, y_1) - g(x, y_2)| + |g(x_1, y_1) - g(x_2, y_1)| \leq \\ &\leq |g(x_1, y_1) - g(x_2, y_1)| + \max_{x\in\partial\Omega} |E(x - y_1) - E(x - y_2)|\end{aligned}$$

аст. Аз ин ҷо бефосилагии g дар нуқтаи (x_1, y_1) мебароояд.

Хосияти 3. Функсияи Грини масъалаи Дирихле мавҷуд аст.

Хосияти 4. Барои ҳар як $y \in \Omega$ дар $\partial\Omega$ ҳосилаи $\frac{\partial G(x,y)}{\partial p(x)}$ мавҷуд аст.

Хосияти 5. $\forall x, y \in \Omega \quad G(x, y) = G(y, x)$.

Исботи хосиятҳои 3 - 5 дар китоби [2] оварда шудаанд.

Аҳамияти функсияи Грин дар ҳалли масъалаи Дирихле аз теоремаи зерин аён мегардад.

Теоремаи 21.1. *Агар функсияи $u \in C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$ ҳалли масъалаи Дирихле*

$$\Delta u = f(x), \quad x \in \Omega, \quad u\big|_{\partial\Omega} = \varphi(x)$$

буда, дар $\partial\Omega$ ҳосилаи $\frac{\partial u}{\partial p}$ мавҷуд бошад, он гоҳ функсияи $u(x)$ тавассути формулаи

$$u(x) = \int_\Omega G(x, y)f(y)dy + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(x, y)}{\partial p(y)}\varphi(y)ds_y \tag{21.1}$$

ёфта мешавад.

Исбот. Барои функсияи u формулаи сеюми Гринро менависем:

$$u(x) = \int\limits_{\Omega} E(x-y)f(y)dy + \int\limits_{\partial\Omega} \left(\varphi(y)\frac{\partial E(x-y)}{\partial p(y)} - E(x-y)\frac{\partial u(y)}{\partial p(y)} \right) ds_y.$$

Аз хосиятҳои 4, 5 бармеояд, ки дар $\partial\Omega$ ҳосилаҳои $\frac{\partial g(x,y)}{\partial p(y)}$ мавҷуд буда, функсияи $g(x,y)$ нисбат ба тағйирёбандаи y дар соҳаи Ω гармоникӣ мебошад. Инро ба назар гирифта, барои функсияҳои $g(x,y), u(y)$ формулаи дуюми Гринро менависем:

$$\int\limits_{\Omega} g(x,y)f(y)dy = \int\limits_{\partial\Omega} \left(g(x,y)\frac{\partial u(y)}{\partial p(y)} - \varphi(y)\frac{\partial g(x,y)}{\partial p(y)} \right) ds_y.$$

Баробариҳои якӯму дуюмро ҷамъ намуда, формулаи (21.1)-ро ҳосил мекунем. Теорема исбот шуд.

Ҳамин тариқ, агар функсияи Гринро донем, тавассути формулаи (21.1) ҳалли масъалаи Дирихлеро ёфтан мумкин аст. Маълум мешавад, ки намуди функсияи Грини масъалаи Дирихле аз шакли соҳаи Ω вобаста мебошад. Дар китобҳои [2,10] функсияҳои Грин барои баъзе соҳаҳо ва тарзҳои ёфтани онҳо оварда шудаанд.

22. Масъалаи Дирихле дар доира

Масъалаи Дирихлеро барои муодилаи Лаплас дар доираи $B(0,R) \subset \mathbb{R}^2$ дида мебароем:

$$\Delta u = 0, \quad x \in B(0,R), \tag{22.1}$$

$$u\big|_{\partial B} = \varphi. \tag{22.2}$$

Теоремаи 22.1. *Масъалаи* (22.1) - (22.2) *коррективӣ буда, ҳалли он аз рӯи формулаи зерин ёфта мешавад:*

$$u(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{(R^2-|x|^2)g(\alpha)d\alpha}{R^2+|x|^2-2R|x|\cos(\theta-\alpha)}, \tag{22.3}$$

ки ин ҷо

$$g(\alpha) = \varphi(R\cos\alpha, R\sin\alpha),$$

$$\cos\theta = \frac{x_1}{|x|}, \quad \sin\theta = \frac{x_2}{|x|}, \quad x = (x_1, x_2)$$

мебошанд.

Формулаи (22.3)-ро *формулаи Пуассон* меноманд.

Исбот. Аз хосиятҳои 6, 7-и функсияҳои гармоникӣ бармеояд, ки ҳалли масъалаи (22.1) - (22.2) агар мавҷуд бошад, ягона буда, аз функсияи φ бефосила вобаста аст. Аз ин рӯ, барои исботи теорема кифоя аст нишон диҳем, ки ҳалли масъала мавҷуд буда, тавассути формулаи (22.3) ёфта мешавад.

Барои ёфтани ҳалли масъала бо гузоришҳои

$$x_1 = \rho\cos\theta, \quad x_2 = \rho\sin\theta, \quad 0 < \rho \le R, \quad 0 \le \theta < 2\pi,$$

$$v(\rho,\theta) = u(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$$

аз тағйирёбандаҳои новобастаи x_1, x_2 ба тағйирёбандаҳои вобастаи нави ρ, θ мегузарем. Он гоҳ масъалаи (22.1) - (22.2) чунин намуд мегирад:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \rho} = 0, \quad 0 < \rho < R, \tag{22.4}$$

$$v(R, \theta) = g(\theta), \quad 0 \le \theta < 2\pi. \tag{22.5}$$

Ҳалли масъалаи (22.4) - (22.5)-ро тавассути методи Фуре (методи ҷудокунии тағйирёбандаҳо) меёбем: аввал ҳалҳои ғайринулии намуди

$$V(\rho, \theta) = \Phi(\rho)\Psi(\theta) \tag{22.6}$$

доштаи муодилаи (22.4)-ро ёфта, сипас, ҳалли масъаларо дар намуди суммаи ин гуна функсияҳо ҷустуҷӯ мекунем.

Функсияи (22.6)-ро дар муодилаи (22.4) гузошта, ҳосил мекунем:

$$\Phi''(\rho)\Psi(\theta) + \frac{1}{\rho^2}\Phi(\rho)\Psi''(\theta) + \frac{1}{\rho}\Phi'(\rho)\Psi(\theta) = 0,$$

$$(\rho^2\Phi''(\rho) + \rho\Phi'(\rho))\Psi(\theta) = -\Psi''(\theta)\Phi(\rho),$$

$$\frac{\rho^2\Phi''(\rho) + \rho\Phi'(\rho)}{\Phi(\rho)} = -\frac{\Psi''(\theta)}{\Psi(\theta)} = \lambda,$$

$$\Psi''(\theta) + \lambda\Psi(\theta) = 0, \quad \Psi(0) = \Psi(2\pi), \tag{22.7}$$

$$\rho^2\Phi''(\rho) + \rho\Phi'(\rho) - \lambda\Phi(\rho) = 0 \quad \text{– муодилаи Эйлер.} \tag{22.8}$$

Масъалаи (22.7) барои қиматҳои $\lambda_n = n^2, n = 0, 1, ...$ ҳалҳои ғайринулии

$$\Psi_n(\theta) = a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta, \quad n = 0, 1, ...$$

-ро дорад. Барои қиматҳои $\lambda_n = n^2, n = 0, 1, ...$ муодилаи (22.8) ҳалҳои дар порчаи $[0; R]$ бефосилаи

$$\Phi_n(\rho) = A_n \rho^n, \quad n = 0, 1, ...$$

-ро дорад. Пас ҳалҳои ғайринулии намуди (22.6) доштаи муодилаи (22.4) аз функсияҳои зерин иборат мебошанд:

$$V_n(\rho, \theta) = \left(\frac{\rho}{R}\right)^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta), \quad n = 0, 1, ...$$

Ин ҷо $A_n = R^{-n}$ гирифтем. Ададҳои a_n, b_n ихтиёрӣ мебошанд.

Ҳалли масъалаи (22.4) - (22.5)-ро дар намуди

$$v(\rho, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R}\right)^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \tag{22.9}$$

ҷустуҷӯ мекунем. Барои ёфтани доимиҳои $a_n, b_n, n = 0, 1, ...$ функсияи v-ро аз баробарии (22.9) дар шарти (22.5) мегузорем:

$$v(R, \theta) = g(\theta), \quad \sum_{k=0}^{\infty}(a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta) = g(\theta).$$

Дар натиҷа ҳосил мекунем:

$$
\begin{cases}
a_0 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} g(\alpha) d\alpha, \\
a_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} g(\alpha) \cos n\alpha d\alpha, \quad n = 1, 2, ... \\
b_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} g(\alpha) \sin n\alpha d\alpha.
\end{cases} \tag{22.10}
$$

Формулаҳои (22.9), (22.10) ҳалли масъалаи (22.4) - (22.5)-ро ифода мекунанд. Формулаи (22.9)-ро табдил медиҳем. Қиматҳои b_n-ро аз (22.10) дар (22.9) мегузорем:

$$
v(\rho, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} g(\theta) d\theta + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \int\limits_0^{2\pi} g(\alpha)(\cos n\alpha \cos n\theta + \sin n\alpha \sin n\theta) d\alpha =
$$

$$
= \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \cos n(\theta - \alpha)\right) g(\alpha) d\alpha =
$$

$$
= \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left(1 + \frac{\rho e^{i(\theta-\alpha)}}{R - \rho e^{i(\theta-\alpha)}} + \frac{\rho e^{-i(\theta-\alpha)}}{R - \rho e^{-i(\theta-\alpha)}}\right) g(\alpha) d\alpha =
$$

$$
= \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 - 2\rho R \cos(\theta - \alpha) + \rho^2} g(\alpha) d\alpha.
$$

Пас ҳалли масъалаи (22.4) - (22.5) аз рӯи формулаи

$$
v(\rho, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{(R^2 - \rho^2) g(\alpha) d\alpha}{R^2 - 2\rho R \cos(\theta - \alpha) + \rho^2}
$$

ёфта мешавад. Дар ин формула аз тағйирёбандаҳои ρ, φ ба тағйирёбандаҳои x_1, x_2 гузашта, формулаи (22.3)-ро ҳосил мекунем.

Теорема исбот шуд.

Ба монанди муҳокимарониҳои болоӣ нишон додан мумкин аст, ки ҳалли маҳдуди масъалаи берунии Дирихле

$$
\Delta u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus B(0, R),
$$

$$
u\big|_{\partial B} = \varphi
$$

мавҷуд ва ягона буда, аз рӯи формулаи

$$
u(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{(|x|^2 - R^2) g(\alpha) d\alpha}{R^2 + |x|^2 - 2R|x| \cos(\theta - \alpha)} \tag{22.11}
$$

ёфта мешавад. Формулаи мазкурро аз формулаи (22.3) тавассути табдилдиҳии Келвин (нигаред ба хосияти 9-и функсияҳои гармоникӣ) низ ҳосил кардан мумкин аст.

Агар масъалаи Дирихле барои муодилаи Пуассон

$$
\Delta u = f(x), \quad x \in B(0, R),
$$

$$u\big|_{\partial B} = \varphi$$

дода шуда бошад, ҳалли онро аз рӯи формулаи (21.1) ёфтан мумкин аст. Барои соҳаи $B(0,R)$ функсияи Грини маъалаи Дирихле ба

$$G(x,y) = \frac{1}{2\pi}\ln|x-y| + \frac{1}{2\pi}\ln\frac{R}{|x|\cdot|x^*-y|},$$

$$x^* = \frac{R^2}{|x|^2}\cdot x$$

баробар аст. Формулаи (22.1)-ро истифода бурда, формулаи (22.3)-ро ҳосил кардан мумкин аст.

23. Масъалаи Нейман

Масъалаи канории дуюмро барои муодилаи Лаплас дида мебароем:

(23.1) $$\Delta u = 0, \quad x\in\Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial p}\bigg|_{\partial\Omega} = \varphi.$$

Азбаски мувофиқи хосияти 2-и функсияҳои гармоникӣ барои функсияи гармоникии $u\in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$ баробарии

$$\int\limits_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial p}ds = 0$$

иҷро мешавад, бинобар он зарур аст, ки функсияи φ шарти

$$\int\limits_{\partial\Omega}\varphi ds = 0$$

-ро қаноат кунонад.

Агар (x_0,y_0) нуқтаи минимум ё максимуми функсияи дар соҳаи Ω гармоникии $u\in C^2(\Omega)\cap C^1(\Omega), u\not\equiv C$ бошад, он гоҳ принсипи максимумро истифода бурда нишон додан мумкин аст, ки дар ин нуқта $\frac{\partial u}{\partial p}$ ғайринулӣ аст. Аз ин рӯ, агар дар масъалаи (23.1) $\varphi\equiv 0$ бошад, пас ҳалли масъала айниятан ба ягон доимӣ баробар аст. Яъне дилхоҳ ду ҳалҳои масъалаи (23.1) аз якдигар бо ягон ҷамъшавандаи доимӣ фарқ мекунанд. Ба таври дигар мегӯянд, ки ҳалли масъалаи (23.1) то аниқии ҷамъшавандаи доимӣ ягона аст.

Бигзор Ω ягон соҳаи якалоқаноки сарҳадаш суфтаи дар ҳамвории $\mathbb{R}^2$ мехобидагӣ бошанд. Дар сарҳади соҳаи Ω функсияи зеринро муайян мекунем:

$$\psi(x) = C + \int\limits_{(x_0x)}\varphi(y)ds_y.$$

Ин ҷо C - ягон адад, x_0 - ягон нуқтаи қайд кардашуда дар $\partial\Omega$ буда, интеграли дар тарафи рост иштироккунанда интеграли каҷхатта аз рӯи хати каҷе мебошад, ки дар $\partial\Omega$ хобида, нуқтаҳои x_0 ва x-ро пайваст мекунад.

Акнун масъалаи Дирихлеи зеринро дида мебароем:

(23.2) $$\Delta v = 0, \quad x\in\partial\Omega, \quad v\big|_{\partial\Omega} = \psi.$$

Нишон медиҳем, ки агар $v\in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$ ҳалли масъалаи (23.2) бошад, он гоҳ функсияи u, ки аз системаи

(23.3) $$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial v}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = -\frac{\partial v}{\partial x_1}, \quad x\in\Omega$$

ёфта мешавад, ҳалли масъалаи (23.1) мешавад.

Бигзор функсияи $v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ ҳалли масъалаи (23.2) бошад. Азбаски $v \in C^1(\overline{\Omega})$ ва хати каҷи $\partial\Omega$ суфта мебошанд, бинобарон дар ҳар як нуқтаи x-и хати каҷи $\partial\Omega$ ҳосилаи функсияи v аз рӯи расандаи $l(x)$, ки ба ин хати каҷ дар нуқтаи x гузаронида шудааст, мавҷуд буда,

$$\frac{\partial v}{\partial l}(x) = \varphi(x), \quad x \in \partial\Omega$$

мешавад.

Барои функсияи додашудаи v то аниқии ҷамъшавандаи доимӣ функсияи u-и баробариҳои (23.3)-ро қаноат мекардагиро ёфтан мумкин аст. Агар функсияи $u \in C^1(\overline{\Omega})$ ин баробариҳоро қаноат кунонад, он гоҳ аз (23.3) ва гармоникӣ будани функсияи $v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ бармеояд, ки $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ буда,

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x_2 \partial x_1} = 0$$

аст. Яъне u дар соҳаи Ω гармоникӣ мебошад. Аз (23.3) инчунин бармеояд, ки

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial p}\bigg|_{\partial\Omega} &= \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\cos(\widehat{OX_1\,\overrightarrow{p}}) + \frac{\partial u}{\partial x_2}\cos(\widehat{OX_2\,\overrightarrow{p}})\right)\bigg|_{\partial\Omega} = \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\cos(\widehat{OX_1\,\overrightarrow{p}}) - \frac{\partial u}{\partial x_1}\cos(\widehat{OX_2\,\overrightarrow{p}})\right)\bigg|_{\partial\Omega} = \\ &= \left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\cos(\widehat{OX_1\,\overrightarrow{l}}) + \frac{\partial v}{\partial x_2}\cos(\widehat{OX_2\,\overrightarrow{l}})\right)\bigg|_{\partial\Omega} = \frac{\partial v}{\partial l}\bigg|_{\partial\Omega} = \varphi \end{aligned}$$

аст.

Ҳамин тариқ, нишон додем, ки масъалаи Нейманро барои муодилаи Лаплас дар соҳаи маҳдуди якалоқаноки сарҳадаш суфтаи дар ҳамворӣ хобанда ба масъалаи Дирихле овардан мумкин аст. Масъалаи Дирихлеро ҳал намуда, сипас, тавассути системаи (23.3) ҳалли масъалаи (23.1)-ро ёфтан мумкин аст.

Дар ҳолати умумӣ масъалаи (23.1) бо ёрии формулаи сеюми Грин ба масъалаи ёфтани ҳалли муодилаи интегралии

$$u(x) = \int\limits_{\partial\Omega}\left(u(y)\frac{\partial E(x-y)}{\partial p(y)} - E(x-y)\varphi(y)\right)ds_y$$

оварда мешавад.

Мо масъалаи мавҷудияти ҳалҳои масъалаҳои канории якӯму дуюмро дар ҳолатҳои ҷудогона омӯхтем ё бо масъалаи мавҷудият ва ёфтани функсияи Грин вобаста намудем. Дар ҳолати умумӣ масъалаҳои канорӣ тавассути формулаи сеюми Грин ба муодилаҳои интегралӣ оварда шуда, сипас, бо истифода аз хосиятҳои потенсиалҳои ҳаҷмию сатҳӣ ва назарияи муодилаҳои интегралӣ мавҷудияти ҳалҳо омӯхта мешаванд. Ин тарзи ҳалли масъалаҳои канориро *методи потенсиалҳо* меноманд.

Ягонагӣ ва бефосила вобастагӣ аз додашудаҳо барои ҳалҳои масъалаҳои канорӣ аз принсипи максимум ҳосил мешаванд.

Ҳамин тариқ, бо истифода аз функсияи Грин, методи потенсиалҳо ва принсипи максимум коррективӣ будани масъалаҳои канории якӯм, дуюм ва сеюм исбот карда мешаванд.